This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

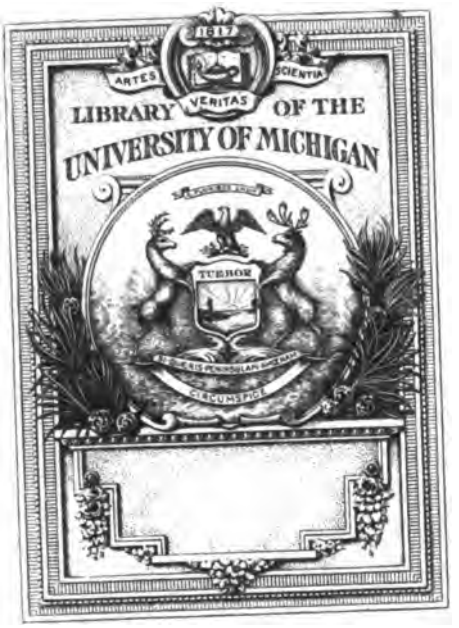
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

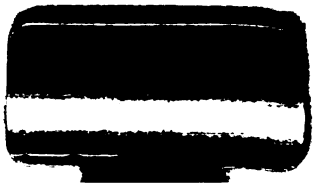
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Mathematics
QA
581
.B27

B 492885


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



MÉMOIRE

SUR LES

LIGNES COURBES NON PLANES,

présenté

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 16 SEPTEMBRE 1844,

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Extrait du Journal de l'École royale Polytechnique, XXX^e Cahier.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1845

Mathematics
QA
581
.B27

Math
Beman
4-5-24
10207

MÉMOIRE

SUR

LES LIGNES COURBES NON PLANES,

PRÉSENTÉ

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 16 SEPTEMBRE 1844 (*),

PAR M. DE SAINT-VENANT.

4-19-35. Mar. J.

« Rien ne nous dispense d'étudier les choses en » elles-mêmes.... Les résultats de nos calculs ont » presque toujours besoin d'être vérifiés, d'un » autre côté, par quelque raisonnement simple. »

(POINSOT, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, II, Réflexion générale.)

EXPOSITION.

1. Lorsqu'on applique les formules de la Géométrie analytique à la solution de divers problèmes, de ceux de Mécanique par exemple, on éprouve souvent le besoin d'en avoir l'interprétation détaillée, et de connaître, pour ainsi dire, toutes les raisons géométriques de leur composition. Cette connaissance n'intéresse pas moins la Géométrie pure, car elle conduit ordinairement aux démonstrations les plus simples et les plus directes de ces formules et des théorèmes dont elles sont l'expression, en même temps qu'elle fixe complétement leur sens.

(*) Les lignes courbes non comprises dans un même plan ont été successivement étudiées par Clairaut (*Recherches sur les courbes à double courbure*, in-4°, 1731), qui a fait adopter le nom sous lequel on les désigne ordinairement (déjà employé par Pitot dans un Mémoire sur *la quadrature*

J'ai eu à faire une étude de ce genre sur les principales formules de la théorie des lignes courbes non planes, à l'occasion de recherches sur l'équilibre des verges élastiques. J'en présente le résultat dans la première partie de ce Mémoire. Je ramène surtout les démonstrations à des considérations de projections, soit de lignes, soit d'aires infinitésimales formées sur les éléments consécutifs de ces courbes. Cette considération me paraît féconde, et j'en donne, par la suite, plusieurs autres applications.

Dans une Note renvoyée à la fin du Mémoire (Note I), j'appelle l'attention sur quelques particularités qui intéressent la mécanique des solides, et qui peuvent en même temps servir à fixer la terminologie relative aux deux affections principales des lignes dans l'espace, dérivant des inclinaisons mu-

---

d'une courbe, Acad., 1724), et qui a donné les équations ou expressions des projections de ces courbes, de leurs tangentes, de leurs normales, de leur arc, etc.; par Monge (*Mémoire sur les développées, les rayons de courbure*, etc., présenté en 1771 et inséré au tome X, 1785, des *Savants étrangers*, ainsi que dans son *Application de l'analyse à la géométrie*), qui a donné les équations et expressions du plan normal, du centre et du rayon dit de première courbure, des développées, des droites dites *polaires* et de la surface développable formée par leur ensemble, du centre de la sphère osculatrice, enfin un caractère pour reconnaître les points de *simple inflexion*, où la seconde courbure est nulle, et ceux de *double inflexion*, où c'est la première courbure qui s'anéantit; par Tinseau (*Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure*, présenté en 1774, *Savants étrangers*, tome IX, de 1780), qui a considéré, le premier, le plan osculateur et la surface des tangentes d'une courbe donnée; par Lacroix (*Calcul différentiel*), qui a rendu, le premier, les formules symétriques en y introduisant les différentielles des trois coordonnées; par Lancret, ingénieur des Ponts et Chaussées, mort à trente-trois ans en 1807 (*Mémoire sur les courbes à double courbure*, lu le 26 avril 1802 et inséré en 1805 au tome I des *Savants étrangers* de l'Institut; *Mémoire sur les développoïdes*, inséré au tome II du même Journal), qui a donné l'expression de ce qu'on appelle la *seconde courbure*, en faisant voir qu'elle est indépendante de la *première*, et que l'angle infinitésimal qui en dépend est celui des éléments plans consécutifs de la surface développable formée par les tangentes à la courbe; qui a donné la position des génératrices de la surface *rectifiante* formée par des plans perpendiculaires aux rayons de courbure, les inclinaisons mutuelles de ces plans; par MM. Cauchy, Navier, Duhamel, qui, dans leurs cours à l'École Polytechnique (publiés en 1826, en 1840, en 1841), ont simplifié les calculs ou généralisé les formules. On peut encore citer M. Vallée (*Géométrie descriptive*, 1819), auquel plusieurs remarques importantes sont dues; M. Th. Olivier (*De la courbure et de la flexion d'une courbe à double courbure*, 28 mars 1835, 24ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*), qui a donné des expressions générales pour l'hélice et pour la sphère osculatrices, et démontré que l'on ne peut pas obtenir, en général, avec une hélice, un contact d'un ordre supérieur à celui du cercle osculateur; enfin l'illustre Fourier, qui a communiqué verbalement à Lancret une propriété intéressante, mais souvent mal énoncée (comme l'a remarqué M. Transon, *Bulletin de la Société philomatique*, 3 août 1844, ou journal *l'Institut*), de l'arête de rebroussement de la surface polaire.

tuelles de leurs éléments et de celles de leurs plans osculateurs successifs. Les noms de *flexion*, de *torsion*, qui leur sont donnés par quelques auteurs, me paraissent devoir être rejetés comme susceptibles d'amener de la confusion et de méprises, car ces mots désigneront souvent tout autre chose, dans la statique des verges courbes, que les deux affections en question, ou que les changements qu'elles éprouvent. Les expressions *première* et *seconde courbure* n'ont pas ces inconvénients, mais elles en ont d'autres qui déterminent plusieurs auteurs à les repousser; aussi je propose aux géomètres un mot nouveau pour la deuxième affection, en réservant pour la première celui de *courbure*.

Dans la seconde partie, je déduis analytiquement, des formules de la première, d'abord quelques résultats dus à Lancret, puis un certain nombre de théorèmes et de résultats nouveaux. Les calculs relatifs aux lignes courbes dans l'espace, et aux surfaces qui ont avec elles des rapports intimes, se présentent ordinairement avec une très-grande complication, et Lancret semble reculer (*) devant le développement de l'un d'eux, effectué depuis d'une manière heureuse par Navier (**). Tous ces calculs deviennent faciles, même dans le cas général où l'on fait varier la différentielle de l'arc comme les autres, au moyen d'un certain choix de notations abréviatives qui répondent géométriquement à quelque chose, et en se faisant d'avance un tableau de formules de transformation et de réduction. Je donne dans une Note (Note II à la fin) ce tableau, facile à dresser, mais fort utile. Il me sert à donner des expressions simples des coordonnées du centre de la sphère osculatrice, pour lesquelles on n'avait encore que les formules compliquées de Monge (***), et des expressions nouvelles, très-simples aussi, du rayon de cette sphère ainsi que de l'angle qu'il fait avec le rayon de courbure. Je donne encore une expression simple de la plus courte distance de deux rayons de courbure consécutifs, un théorème sur la position des points où la petite ligne qui la mesure coupe ces rayons, et qui, par leur ensemble, forment la *courbe de gorge* ou *de striction* de la surface gauche composée

(*) Art. XI de son premier Mémoire.

(**) *Leçons d'Analyse*, 239.

(***) *Mémoire sur les développées*, etc., XXIV.

avec les rayons de courbure. Ces points sont aussi des centres de courbure de la surface développable appelée *rectifiante* par Lancret, et qui contient elle-même tous les centres de courbure de la surface développable formée par l'ensemble des tangentes à la courbe donnée. Je donne aussi les équations des génératrices rectilignes de la surface rectifiante, qui sont les axes de cônes osculateurs à la surface des tangentes; les angles que ces droites forment deux à deux, la position des points où elles se rencontrent, les longueurs et les directions des éléments de la courbe des centres de courbure, de la courbe des centres de la sphère osculatrice, appelée par Lancret *développée par le plan* (*), de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante, etc.

Dans la troisième partie, qui peut être lue séparément, je donne des démonstrations simples et purement géométriques des résultats obtenus analytiquement dans la deuxième. Plusieurs formules du *tableau* sont aussi vérifiées et interprétées géométriquement à la fin de la Note II.

PREMIÈRE PARTIE.

Démonstration des formules fondamentales. Définitions et notations.

2. Une ligne tracée dans l'espace n'a, en général, ses éléments successifs ni dans la même direction, ni dans le même plan. Il y a inclinaison mutuelle, non-seulement des éléments, mais encore des plans que forment les éléments pris deux à deux.

Soient donc

M, M', M'', M''' une suite de points de cette courbe non plane;

x, y, z les coordonnées du premier;

$x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ celles du second, etc.;

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ l'élément MM';

(*) Je ne m'occuperai pas des *développées par le fil,* qui ont été suffisamment étudiées; on sait que la courbe des centres de courbure d'une ligne non plane n'est pas une de ses développées.

$\frac{ds}{\rho}$ l'angle infiniment petit de deux éléments consécutifs MM′, M′M″, ou, ce qui revient au même, des deux tangentes menées aux points M, M′ dont la distance est ds; angle qui doit bien être proportionnel à ds si la courbe est continue, quand, le point M restant fixe, le point infiniment voisin M′ varie, et qui peut être, en conséquence, exprimé par le rapport de ds à une ligne finie ρ;

$\frac{ds}{\nu}$ l'angle, aussi infiniment petit et proportionnel à ds, du plan MM′M″ de ces deux éléments, et du plan M′M″M‴, ou l'angle des deux plans *osculateurs* à la courbe, aux points M et M′.

On peut déterminer, de la manière simple qui suit, les deux affections $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\nu}$ de la courbe non plane, et les autres particularités relatives à son point M, en fonction des différentielles des coordonnées de ce point.

3. Construisons un parallélogramme infinitésimal MM′M″N (*Pl. I, fig.* 1) sur les deux premiers éléments MM′, M′M″, et cherchons les aires de ses projections sur les trois plans coordonnés.

Comme les deux côtés MM′, MN adjacents en M ont pour projections sur les trois axes, le premier dx, dy, dz, l'autre $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$. on aura

$$d^2x, \quad d^2y, \quad d^2z$$

pour les projections de la petite diagonale M′N sur les mêmes axes.

Soit $mm'm''n$ la projection du parallélogramme MM′M″N sur le plan xy, par exemple. Son aire, que nous cherchons, est la même que celle d'un autre parallélogramme $mm'np$ construit sur le côté mm' et sur la petite diagonale $m'n$; elle est, par conséquent, égale à la différence de celles de deux autres parallélogrammes $pnrq$, $mm'rq$ formés sur des lignes égales et parallèles à mm', et sur les deux projections $m'r = d^2x$, $rn = d^2y$ de $m'n$, parallèlement aux x et aux y; car, si l'on ajoute, au premier $pnrq$ de ceux-ci, le petit triangle mqp, et si l'on retranche le triangle égal $m'rn$, on a précisément la somme du second parallélogramme $mm'rq$ et de celui $mm'np$, dont nous voulons avoir l'aire. Les deux parallélogrammes $pnrq$, $mm'rq$, dont on vient de voir que celui-ci est la différence, ont respectivement pour aires dxd^2y, et dyd^2x, puisque l'on peut prendre leurs petits côtés pour leurs bases. Donc la projection, sur le plan xy, du parallélogramme MM′M″N des

deux éléments consécutifs de la courbe, a pour superficie

$$\pm (dx\,d^2y - dy\,d^2x).$$

On aura de même

$$\pm (dy\,d^2z - dz\,d^2y), \qquad \pm (dz\,d^2x - dx\,d^2z)$$

pour les projections de ce parallélogramme infinitésimal sur les deux autres plans coordonnés yz et zx.

Les signes hors des parenthèses ne peuvent être déterminés qu'autant que l'on a choisi, entre les deux faces opposées du parallélogramme MM′M″N, celle dont on veut avoir les projections, et que l'on a fixé aussi la situation respective des coordonnées x, y, z. Supposons, comme à l'ordinaire, qu'en se plaçant à l'origine, dans l'angle trièdre des trois demi-axes positifs, on voie, sur le plan xy, le demi-axe des x à gauche et celui des y à droite, et, sur les deux autres plans, y à gauche et z à droite, z à gauche et x à droite. Le premier des trois binômes entre parenthèses aura constamment une valeur positive lorsqu'en se plaçant en m sur la projection $mm'm''n$ dont ce binôme donne l'aire, et à l'intérieur de l'angle trièdre, on verra mm' à sa gauche et mn à sa droite; on le voit sur la figure, qui représente le cas où les quatre différentielles dx, dy, d^2x, d^2y sont positives, et l'on peut s'en assurer, si l'on veut, pour tous les autres cas, en faisant tourner $mm'm''n$ de toutes les manières possibles autour de m sur son plan. Semblable chose peut être dite des deux autres binômes entre parenthèses, quels que soient, du reste, les signes et les rapports de grandeur des différentielles qui y entrent.

Supposons donc que l'aire du parallélogramme MM′M″N *non projeté soit constamment prise du côté de son plan, où l'on voit à gauche le premier élément* MM′, *et à droite la parallèle* MN *au second élément, en se plaçant en* M, les trois binômes entre parenthèses auront des valeurs positives quand une normale au plan, élevée de ce côté-là, se projettera positivement sur les trois axes, c'est-à-dire précisément dans le cas où les trois projections de l'aire sur les plans coordonnés seront positives.

Il faut, par conséquent, prendre toujours les trois signes supérieurs.

4. Faisons donc

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = X, \qquad dz\,d^2x - dx\,d^2z = Y, \qquad dx\,d^2y - dy\,d^2x = Z.$$

X, Y, Z sont les aires du parallélogramme des deux éléments MM', M'M'', pris comme on vient de dire et projeté successivement sur les trois plans coordonnés.

L'aire du parallélogramme non projeté a pour expression

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

mais elle est égale aussi au produit de deux côtés contigus et du sinus de l'angle compris, ou à

$$ds.ds.\frac{ds}{\rho},$$

à cela près d'une quantité du quatrième ordre et négligeable. Donc on a, pour déterminer ρ, la formule

$$\frac{ds^3}{\rho}=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \tag{1}$$

où l'on prend le radical avec le signe +, *parce que ds et* ρ *sont toujours supposés positifs*.

On a aussi, pour les cosinus des angles que fait le plan du parallélogramme, c'est-à-dire le plan osculateur en M, avec les trois plans coordonnés, les trois projections X, Y, Z divisées par l'aire non projetée. Ces cosinus sont donc

$$\frac{\rho X}{ds^3},\quad \frac{\rho Y}{ds^3},\quad \frac{\rho Z}{ds^3}, \tag{2}$$

ou

$$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \tag{3}$$

expressions qui représentent aussi les cosinus des angles faits avec les axes des x, y, z par une normale au plan osculateur, élevée en M du côté de ce plan où les cosinus ont les mêmes signes que les binômes X, Y, Z, c'est-à-dire du côté où l'on voit, en s'adossant à la normale, l'élément *ds* à gauche d'une parallèle à l'élément suivant, menée par M, *ou du côté où l'on voit la convexité à gauche et la concavité à droite de l'élément* MM' *de la courbe, en se plaçant en* M.

5. La considération du même parallélogramme peut fournir, d'une manière simple, une autre formule donnant ρ.

Projetons, comme a fait Navier, sa petite diagonale successivement sur un de ses côtés et sur une perpendiculaire à ce côté, menée dans son plan. La première projection sera d^2s, différence entre les longueurs ds, $ds + d^2s$ des deux côtés; la seconde sera $\frac{ds^2}{\rho}$, produit d'un des côtés par le sinus $\frac{ds}{\rho}$ de leur angle. La somme des carrés de ces deux projections sera égale au carré $d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$ de la diagonale. Donc

$$\frac{ds^2}{\rho} = \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}. \tag{4}$$

6. L'angle $\frac{ds}{\rho}$ des tangentes menées en deux points dont la distance est ds, est aussi l'angle des normales à la courbe aux mêmes points, menées l'une et l'autre dans le plan des deux tangentes; ces deux normales doivent, par conséquent, aller se rencontrer à la distance ρ. Donc la ligne que nous avons appelée ρ est la longueur du rayon du cercle osculateur de la courbe au point M, et la direction de ce rayon est celle de la normale en M menée dans le plan osculateur.

On peut voir facilement que cette direction est celle de la petite perpendiculaire dont nous avons parlé au numéro précédent; mais, pour l'obtenir simplement, il vaut mieux prolonger les deux côtés MM′, MN du parallélogramme, de manière à les rendre égaux à l'unité de longueur, ou mener, comme a fait encore Navier, par un point quelconque tel que M, deux droites égales à l'unité et respectivement parallèles aux deux tangentes en M et M′.

Puisque dx, dy, dz sont les projections de la petite ligne positive MM′ $= ds$, les projections de la première droite, ou les cosinus des angles que fait, avec les demi-axes positifs des x, y, z, la demi-tangente en M menée du côté MM′, sont

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Les projections de la seconde droite seront

$$\frac{dx}{ds} + d.\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} + d.\frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} + d.\frac{dz}{ds}. \tag{6}$$

Donc, si l'on joint les extrémités de ces deux droites égales à l'unité, on aura une ligne infiniment petite qui, supposée tirée de la première à la

seconde, a, pour projections sur les x, y, z,

$$(7) \qquad d\frac{dx}{ds}, \quad d\frac{dy}{ds}, \quad d\frac{dz}{ds};$$

mais la longueur de cette petite ligne est $\frac{ds}{\rho}$, puisqu'elle mesure l'angle des deux droites, et sa direction est celle du rayon de courbure, puisqu'elle est parallèle à la normale comprise dans le plan de deux tangentes consécutives. Donc les cosinus des angles que le rayon de courbure en M supposé tiré de M vers le centre fait avec les demi-axes positifs des x, y, z, sont les quotients de (7) par $\frac{ds}{\rho}$, ou

$$(8) \qquad \frac{\rho}{ds} d\frac{dx}{ds}, \quad \frac{\rho}{ds} d\frac{dy}{ds}, \quad \frac{\rho}{ds} d\frac{dz}{ds};$$

et l'on a, pour déterminer ρ, ou l'angle de contingence $\frac{ds}{\rho}$, cette troisième formule

$$(9) \qquad \frac{ds}{\rho} = \sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2} \text{ (*)},$$

(*) Il n'est pas inutile de discuter ici une autre démonstration que plusieurs géomètres donnent de cette expression (9) de l'angle infiniment petit de deux tangentes consécutives. Ils la déduisent de la formule qui exprime le cosinus de l'angle de deux droites par la somme de trois produits deux à deux des six angles que ces droites font avec trois axes rectangulaires. Mais cette formule générale donne *zéro* pour l'angle quand on y met les cosinus (5)

$$(a) \qquad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

des angles de la tangente en M, et ceux (6)

$$(b) \qquad \frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} + d\frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} + d\frac{dz}{ds}$$

des angles de la tangente en M'; car on a

$$(c) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

et, par suite, en différentiant,

$$(d) \qquad \frac{dx}{ds} d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds} = 0,$$

ce qui réduit rigoureusement à l'unité le second membre de la formule générale en question, tandis

que l'on aurait pu déduire analytiquement, ainsi que celle (4), de celle (1), comme on le verra au tableau de la Note II [formules (*n*) et (*o*)].

7. L'angle $\frac{ds}{\rho}$ de deux plans osculateurs consécutifs peut s'obtenir comme nous venons d'obtenir l'angle de contingence, en menant par le point M, du côté où l'on voit le rayon de courbure à droite de MM′ en se plaçant en M (n° 4), deux droites égales à l'unité et normales respectivement à ces deux plans. La petite ligne qui joindra leurs extrémités mesurera leur angle $\frac{ds}{\rho}$, et, en égalant son carré à la somme de ceux de ses trois projections, déter-

---

qu'on devrait avoir l'unité plus un infiniment petit du second ordre. Aussi, pour en tirer quelque chose, les uns, au nombre desquels est Poisson (*Méc.*, 2e édit., Introd., 18), prennent pour les cosinus des angles de la seconde tangente, non les expressions (b), mais des développements tels que $\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds} + \frac{1}{2}d^2\frac{dx}{ds}$, tirés de la série de Taylor et poussés jusqu'aux différentielles secondes; et, après la substitution dans la formule générale du cosinus, ils réduisent son second membre au moyen de l'équation (c) et de sa différentielle (d); puis ils éliminent les différentielles secondes au moyen de l'équation qui résulte d'une nouvelle différentiation de celle-ci, ce qui fournit finalement une expression de l'angle cherché en substituant d'abord à son cosinus l'unité moins le double du carré du sinus de la moitié.

Les autres, pour arriver à ce double carré, prennent pour bonnes les expressions (a), (b) des cosinus des angles formés avec les coordonnées par les deux tangentes, sans chercher à rendre celles-ci plus exactes par l'addition de termes d'ordre supérieur; mais c'est l'équation différentielle (d) dont ils ne se contentent pas et qu'ils complètent en y ajoutant les infiniment petits du second ordre qui résultent de la substitution de $\frac{dx}{ds} + d\frac{dy}{ds}$ à la place de $\frac{dx}{ds}$, etc., dans l'équation (c).

Je ne viens pas contester absolument la rigueur de ces deux méthodes; mais, si l'on peut les légitimer, elles me paraissent toujours peu satisfaisantes, indirectes, ou tout au moins difficiles à retrouver, car on ne se rappelle pas aisément comment on doit regarder comme inexactes, tantôt les expressions (b) des cosinus de la tangente en M′, tantôt l'équation (d) qui résulte de la différentiation d'une équation exacte.

Aussi je crois qu'il est préférable de regarder la formule ordinaire du cosinus de l'angle de deux droites données de position par rapport à trois axes, comme se prêtant mal au cas où cet angle est infiniment petit, et *d'y substituer*, comme plus simples, *les considérations géométriques mêmes qui servent à démontrer cette formule connue.* Ces considérations, celles, du moins, dont on se sert aujourd'hui généralement, sont celles des projections de lignes droites et brisées, presque toujours aussi faciles à retenir que les formules auxquelles elles conduisent.

C'est ce que Navier a fait (*Leçons d'Analyse*, n° 237) pour le cas qui nous occupe; le raisonnement qui nous a conduit à la formule (9) n'est même guère que la reproduction du sien, et je pense qu'il convient de l'adopter à l'exclusion des autres dont nous venons de parler.

minées comme on a fait tout à l'heure, on aura

$$\frac{ds}{v} = \sqrt{\left(d.\frac{\rho X}{ds^3}\right)^2 + \left(d.\frac{\rho Y}{ds^3}\right)^2 + \left(d.\frac{\rho Z}{ds^3}\right)^2}. \tag{10}$$

On verra à la Note II [formules (s'), (g')] le développement du calcul de cette expression fait par Navier, et auquel Lancret avait suppléé par des considérations indirectes; mais on l'évite, ainsi que l'ambiguïté des signes, en donnant aux deux normales des longueurs numériquement égales, non à l'unité, mais aux aires respectives des deux parallélogrammes consécutifs MM'M'', M'M''M''', et en formant un nouveau parallélogramme sur les deux lignes ainsi mesurées. Comme les angles qu'elles font avec les trois demi-axes positifs x, y, z sont les mêmes que ceux que les plans osculateurs font avec les côtés positifs des plans yz, zx, xy, les projections de la première ligne sur les x, les y, les z seront

$$X,\ Y,\ Z;$$

celles de la seconde seront

$$X + dX,\quad Y + dY,\quad Z + dZ.$$

Donc, d'après ce qu'on a vu (n° 3), les trois projections du parallélogramme qu'elles forment seront, sur les plans yz, zx, xy,

$$Y dZ - Z dY,\quad Z dX - X dZ,\quad X dY - Y dX;$$

mais $Y dZ - Z dY = Y(dx\,d^2y - dy\,d^2x) - Z(dz\,d^2x - dx\,d^2z)$ revient à $dx(Y d^2y + Z d^2z + X d^2x)$, parce que $X dx + Y dy + Z dz = 0$. Les deux autres projections reviennent au même trinôme entre parenthèses $X d^2x + Y d^2y + Z d^2z$, multiplié successivement par dy et dz. Observons aussi que ces trois mêmes produits de dx, dy, dz par le trinôme peuvent être regardés comme les projections, sur les axes des x, y, z, d'une perpendiculaire au plan du parallélogramme, numériquement égale à son aire et élevée de M dans le sens où l'on voit son premier côté à gauche du second en se plaçant au point M (n° 4). Cette perpendiculaire n'est autre chose qu'une portion de la tangente à la courbe en M, dont nous savons qu'une autre portion $MM' = ds$ a pour projections dx, dy, dz. Sa longueur, ou l'aire

du parallélogramme, est donc

$$ds\,(\mathrm{X}d^3x + \mathrm{Y}d^3y + \mathrm{Z}d^3z),$$

et cette expression aura, comme on voit, une valeur positive ou une valeur négative, selon qu'en se plaçant sur la demi-tangente MM′ on apercevra à gauche la normale au plan osculateur en M, et à droite celle au plan en M′, ou réciproquement.

D'une autre part, l'aire non projetée de notre parallélogramme, dont les deux côtés contigus ont des longueurs $\frac{ds^3}{\rho}$, $\frac{ds^3}{\rho} + d.\frac{ds^3}{\rho}$ et comprennent l'angle $\frac{ds}{\tau}$, est

$$\frac{ds^6}{\rho^2}\cdot\frac{ds}{\tau}.$$

Égalant ces deux expressions, on obtient celle

$$(11) \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\rho^2}{ds^6}(\mathrm{X}d^3x + \mathrm{Y}d^3y + \mathrm{Z}d^3z) = \frac{\mathrm{X}d^3x + \mathrm{Y}d^3y + \mathrm{Z}d^3z}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2},$$

qui donnera, non-seulement la grandeur, mais encore le sens de la deuxième affection de la courbe.

$\frac{1}{\tau}$ n'aura pas toujours le signe +, comme $\frac{1}{\rho}$; il sera positif (avec le numérateur trinôme) lorsqu'en s'adossant à la demi-tangente MM′ prolongée et regardant les deux plans osculateurs du côté de M où sont les rayons de courbure, on verra à sa gauche le plan mené en M et à sa droite celui mené en M′; et $\frac{1}{\tau}$ sera négatif dans le cas contraire.

8. On peut démontrer cette formule d'une manière plus directe en considérant géométriquement les deux parallélogrammes consécutifs MM′M″, M′M″M‴ (*fig.* 2) formés sur les éléments de la courbe. Si du point M‴, appartenant au plan du second, on abaisse une perpendiculaire sur le plan du premier et une perpendiculaire sur leur intersection commune, qui est M′M″ prolongée, le quotient de la première perpendiculaire par la seconde sera le sinus $\frac{ds}{\tau}$ du petit angle de leurs deux plans. La seconde perpendiculaire, celle qui est abaissée sur l'intersection, est égale au troisième élément M″M‴ multiplié par l'angle infiniment petit qu'il forme avec le se-

cond élément prolongé; sa longueur est

$$ds\frac{ds}{\rho},$$

à cela près de quantités du troisième et du quatrième ordre que nous négligeons.

Quant à la première perpendiculaire, qui mesure la distance du sommet M‴ du deuxième parallélogramme au plan MM′M″ du premier, nous obtiendrons facilement sa longueur en construisant un troisième parallélogramme MQRQ′ sur les lignes MQ, MQ′ égales et parallèles respectivement aux deux diagonales M′N, M″N′ des deux autres. La petite diagonale QQ′ de ce nouveau parallélogramme aura d^3x, d^3y, d^3z pour projections sur les trois axes coordonnés, car les projections de M′N, M″N′ sont d^2x, d^2y, d^2z et d^2x+d^3x, d^2y+d^3y, d^2z+d^3z. Cette même nouvelle diagonale QQ′ aura pour projection, sur une normale au plan MM′M″, précisément la distance de N′ ou de M‴ à ce plan. Donc, d'après les expressions (2) des trois cosinus des angles de la normale au plan osculateur MM′M″, on a, pour la longueur cherchée de la première perpendiculaire,

$$\frac{\rho X}{ds^3}d^3x+\frac{\rho Y}{ds^3}d^3y+\frac{\rho Z}{ds^3}d^3z. \tag{12}$$

En la divisant par la seconde perpendiculaire dont nous avons trouvé la longueur égale à $ds\frac{ds}{\rho}$, nous devons obtenir, avons-nous dit, le petit sinus $\frac{ds}{\tau}$. Donc

$$\frac{ds}{\tau}=\frac{\rho^2}{ds^3}(Xd^3x+Yd^3y+Zd^3z),$$

ou la formule déjà trouvée (11), dont le second membre est positif lorsque M‴, ou Q′, est en avant du plan du tableau pris pour plan de MM′M″.

9. Observons que la petite perpendiculaire (12) est la hauteur d'un parallélipipède formé sur les trois éléments consécutifs MM′, M′M″, M″M‴, en prenant pour sa base le premier parallélogramme MM′M″N. Comme la superficie de cette base est $\frac{ds^3}{\rho}$ (n° 4), on voit que le trinôme

$$Xd^3x+Yd^3y+Zd^3z,$$

ou, ce qui est la même chose, le sextinôme

$$dxd^2yd^3z-dxd^2zd^3y+dyd^2zd^3x-dyd^2xd^3z+dzd^2xd^3y-dzd^2yd^3x$$

représente le volume de ce parallélipipède infinitésimal dont les angles plans aigus sont $\frac{ds}{\rho}$, dont les angles dièdres aigus sont $\frac{ds}{\tau}$, et qui, par conséquent, étant divisé par le carré du parallélogramme $\frac{ds^2}{\rho}$, donne $\frac{1}{\tau}$. On pouvait déduire ce résultat d'un théorème de Lagrange sur le volume de la pyramide (*), ou de cette simple remarque, que le parallélipipède en question est équivalent à celui qui a la même base $MM'M''N$, avec une arête égale et parallèle à QQ', et que celui-ci équivaut à la somme de trois autres ayant la même arête, et pour bases les projections X, Y, Z de sa base.

10. La considération des *aires* ou *aréoles de contingence* ou *de courbure,* formées sur les éléments consécutifs des lignes courbes, peut faciliter la solution de plusieurs problèmes de Géométrie ou de Mécanique. Donnons-en deux exemples (**).

1°. Supposons qu'on veuille avoir l'expression du rayon de courbure lorsque les coordonnées x, y, z sont rapportées à des axes obliques. Les trois aires, ou les projections obliques du parallélogramme du n° **3** sur les trois plans yz, zx, xy, ne seront pas les binômes désignés par X, Y, Z (n° **4**), mais il est facile de voir qu'elles seront

$$X \sin \hat{yz}, \quad Y \sin \hat{zx}, \quad Z \sin \hat{xy}.$$

L'aire non projetée sera mesurée par la diagonale d'un parallélipipède formé avec trois lignes perpendiculaires aux plans coordonnés, et proportionnelles aux aires projetées. Donc

$$\frac{ds^2}{\rho} = \sqrt{\begin{array}{l} X^2 \sin^2 \hat{yz} + Y^2 \sin^2 \hat{zx} + Z^2 \sin^2 \hat{xy} \\ + 2YZ \sin \hat{zx} \sin \hat{xy} \cos (\hat{zx}, \hat{xy}) + 2ZX \sin \hat{xy} \sin \hat{yz} \cos (\hat{xy}, \hat{yz}) + 2XY \sin \hat{yz} \sin \hat{zx} \cos (\hat{yz}, \hat{zx}). \end{array}}$$

On donne une autre forme à cette expression en remplaçant les cosinus des angles des plans coordonnés par leurs expressions, données par une formule de trigonométrie sphérique, en fonction des seuls angles des axes, c'est-à-dire en mettant $\cos \hat{yz} - \cos \hat{zx} \cos \hat{xy}$ au lieu de $\sin \hat{zx} \sin \hat{xy} \cos (\hat{zx}, \hat{xy})$.

(*) Académie de Berlin, 1773, *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation,* 14; ou bien, *voyez* Cauchy, *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal,* p. 29.

(**) On en trouvera d'autres ci-après, troisième partie, et fin de la Note de la deuxième partie.

Il en résulte, en remplaçant $\sin^2 \widehat{yz}$ par $1 - \cos^2 \widehat{yz}$, etc. :

$$\frac{ds^2}{\rho} = \sqrt{\begin{array}{l} X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\widehat{yz} + 2ZX\cos\widehat{zx} + 2XY\cos\widehat{xy} \\ -(X\cos\widehat{yz} + Y\cos\widehat{zx} + Z\cos\widehat{xy})^2. \end{array}}$$

2°. Supposons (en revenant aux coordonnées rectangulaires) qu'une verge élastique soit encastrée quelque part, en sorte que l'élément MM′ de sa courbe d'axe soit maintenu fixe, tandis que le reste change de position. On demande de déterminer, sur la section normale à l'élément suivant M′M″, la direction de la ligne dite *des fibres invariables,* qui est l'intersection des plans normaux aux deux directions successives de M′M″, considérées avant et après le changement.

Soient δ la caractéristique des changements éprouvés, et M″ (*fig.* 3) la nouvelle position du point M″. Prolongeons l'élément fixe MM′ d'une longueur M′P égale à la sienne. Le petit triangle M′PM″, égal à la moitié du parallélogramme qui serait construit sur MM′, M′M″, aura pour projections sur les trois plans coordonnés $\frac{1}{2}X$, $\frac{1}{2}Y$, $\frac{1}{2}Z$ comme nous avons vu, et les projections de M′PM″$_1$ seront $\frac{1}{2}(X+\delta X)$, $\frac{1}{2}(Y+\delta Y)$, $\frac{1}{2}(Z+\delta Z)$. Mais la projection du second triangle, sur un plan quelconque, est égale à la projection du premier, plus les projections des deux autres triangles M′M″M″$_1$, PM″M″$_1$ qui forment avec eux un tétraèdre complet; et le dernier est infiniment petit par rapport à l'autre, puisque PM″, PM″$_1$ sont du second ordre, tandis que M′M″, M′M″$_1$ sont du premier ordre. Donc la projection de PM″M″$_1$ peut être négligée, et le petit triangle M′M″M″$_1$ a pour projections $\frac{1}{2}\delta X$, $\frac{1}{2}\delta Y$, $\frac{1}{2}\delta Z$ sur les trois plans coordonnés.

Mais l'intersection, dont nous cherchons la direction, est une perpendiculaire commune à M′M″, M′M″$_1$, et par conséquent, au plan du petit triangle dont nous venons de parler. Donc les cosinus des angles de cette droite avec les trois axes coordonnés x, y, z sont

$$\frac{\partial X}{\sqrt{\partial X^2+\partial Y^2+\partial Z^2}}, \quad \frac{\partial Y}{\sqrt{\partial X^2+\partial Y^2+\partial Z^2}}, \quad \frac{\partial Z}{\sqrt{\partial X^2+\partial Y^2+\partial Z^2}}.$$

On ne peut arriver analytiquement à ces expressions que par de longs calculs.

11. La démonstration géométrique, donnée au n° **3**, des expressions des

projections d'un parallélogramme infinitésimal, s'applique à des parallélogrammes finis, et aussi à des triangles quelconques.

Soient x', y', z' et x'', y'', z'' les projections de deux des côtés d'un triangle sur les trois axes rectangulaires (disposés comme on a dit n° 3); *les projections du double de son aire sur les trois plans que ces axes déterminent sont*

$$y'z'' - z'y'', \quad z'x'' - x'z'', \quad x'y'' - y'z'',$$

pourvu qu'en se plaçant sur cette aire au sommet commun, on voie le premier côté à gauche et le second à droite; car, sinon, les projections seraient ces trois binômes pris avec des signes contraires.

De ce théorème, donné, je crois, pour la première fois par Monge (*), et qui peut être démontré de plusieurs autres manières (**), on déduit beaucoup de conséquences.

Par exemple, si les deux côtés du triangle sont égaux à l'unité, on obtient les trois binômes ci-dessus pour les cosinus des angles faits, avec les trois axes, par une perpendiculaire commune à deux lignes droites faisant avec les mêmes axes, dans le sens où on les suppose tirées, des angles dont les cosinus sont x', y', z' pour la première droite, et x'', y'', z'' pour la seconde droite, cette perpendiculaire étant tirée elle-même dans le sens convenable pour qu'en s'y adossant on voie la première des deux lignes à gauche de la seconde.

Nous en ferons plusieurs fois usage dans la deuxième partie.

12. *Définitions et notations.* — Par les motifs que je développe dans une Note (***), j'appellerai, dans la suite de ce Mémoire :

Angle de courbure, l'inclinaison mutuelle $\frac{ds}{\rho}$ des tangentes à une courbe en deux points indéfiniment voisins dont la distance MM′ est ds toujours positive, et dont le premier M a pour coordonnées x, y, z;

Angle de cambrure, l'inclinaison $\frac{ds}{\tau}$ des plans osculateurs aux mêmes points;

(*) *Essai d'application de l'analyse,* etc., Journal de l'École Polytechnique, XV^e^ cahier, 1809.

(**) *Journal de* M. Liouville, t. IX, p. 311.

(***) Note I, à la fin du Mémoire.

Courbure au point M, l'affection $\frac{1}{\rho}$ de la courbe, ou le petit angle des tangentes rapporté à l'unité de distance de ce point M de la courbe à un autre qui s'en rapproche indéfiniment (ρ est toujours positif);

Cambrure, l'affection analogue $\frac{1}{\nu}$ au même point (ν peut être négatif);

Rayon de courbure, rayon de cambrure, les longueurs ρ et ν, dont la première est le rayon du cercle osculateur à la courbe, ou la distance du point M au centre de courbure.

Nous appellerons aussi *rayon de courbure,* quand il s'agira de direction et non de grandeur, la droite indéfinie qui joint ces deux points, ou la normale à la courbe, comprise dans son plan osculateur, et supposée tirée de M vers le centre;

Binormale, celle des normales qui est perpendiculaire au plan osculateur. Cette ligne, que l'on est obligé de considérer très-souvent aussi, et à laquelle il n'a pas encore été donné de nom, est, en effet, normale à *deux* éléments consécutifs à la fois, tandis que les autres normales à la courbe ne le sont qu'à un seul de ses éléments; on la suppose tirée comme il a été dit à la fin du n° 4 (*).

Nous appellerons encore, avec Monge et Lancret,

Droite polaire, l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins, ou la perpendiculaire au plan osculateur, menée par le centre de courbure;

Surface polaire, la surface développable formée par l'ensemble des droites polaires;

Sphère osculatrice, la sphère ayant un contact du troisième ordre avec la courbe donnée au point M: son centre est à l'intersection de deux droites polaires, ou de trois plans normaux, et la suite des centres des sphères forme l'*arête de rebroussement* de la surface polaire, ou cette ligne que Lancret a appelée la *développée par le plan;*

(*) On pourrait appeler aussi *pernormale* cette normale, qui l'est en quelque sorte plus que les autres. Je l'aurais appelée simplement *normale principale,* sans faire un mot nouveau, si je n'avais craint la confusion, car cette dernière dénomination (qui lui conviendrait) est déjà employée, dans plusieurs écrits, pour désigner la *direction* du rayon de courbure, peu utilement à mon avis.

Rayon de cette sphère, quand il s'agira de direction, la droite indéfinie qui va du point M à son centre;

Surface des éléments, surface des tangentes, la surface développable formée par l'ensemble des éléments de la courbe, prolongés indéfiniment, ou la surface engendrée par le mouvement de son plan osculateur;

Surface rectifiante, la surface engendrée par la suite des *plans rectifiants* qui sont menés, par chaque point de la courbe, perpendiculairement au rayon de courbure correspondant; Lancret l'a appelée ainsi parce que, dans son développement, la courbe donnée devient rectiligne : c'est la *développée* (Monge, XLI) de la surface des tangentes, comme on verra plus loin;

Droite rectifiante, ou simplement *rectifiante* en M, une des génératrices de cette surface, ou l'intersection de deux plans rectifiants consécutifs. Cette droite joue un rôle important, moins comme charnière de rectification de la courbe que comme *perpendiculaire commune aux directions de deux rayons de courbure consécutifs,* et comme lieu de centres de courbure de la surface des tangentes, ou axe du cône droit qui lui est osculateur suivant la tangente en M. (*Voyez* la troisième partie.) Nous la supposerons toujours tirée de M, de manière qu'en s'y adossant on voie à gauche le rayon de courbure en M, et, à droite, une parallèle au rayon de courbure en M′, menée par M.

Nous nommerons :

H, l'angle que fait la rectifiante avec la tangente à la courbe en M;

I, l'angle (complément de H quand H est aigu) de la même droite avec la binormale;

L, la longueur de cette droite jusqu'à sa rencontre avec la droite analogue relative au point M′, ou la distance, au point M, du point correspondant de l'*arête de rebroussement de la surface rectifiante;*

R, la longueur du rayon de la sphère osculatrice;

$\frac{ds}{\mathfrak{R}}$, l'angle infiniment petit de deux rayons de courbure consécutifs, ou des deux plans rectifiants qui leur sont perpendiculaires : nous l'appellerons quelquefois *angle de courbure et cambrure composées* ($\mathfrak{R}$ est toujours supposé positif);

ξ, η, ζ, les coordonnées courantes, hors de la courbe donnée.

Outre les abréviations du n° 4 :

$$dyd^2z - dzd^2y = X, \qquad dzd^2x - dxd^2z = Y, \qquad dxd^2y - dyd^2x = Z,$$

nous ferons quelquefois

$$d^2yd^3z - d^2zd^3y = X', \qquad d^2zd^3x - d^2xd^3z = Y', \qquad d^2xd^3y - d^2yd^3x = Z',$$

(14)

et

$$d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dz}{ds} - d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dy}{ds} = X'_s, \quad d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dx}{ds} - d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dz}{ds} = Y'_s, \quad d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dy}{ds} - d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dx}{ds} = Z'_s.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Démonstration analytique de diverses formules et de divers théorèmes relatifs aux courbes dans l'espace, ainsi qu'aux lignes et aux surfaces qui ont avec elles des rapports intimes.

13. *Angle de courbure et cambrure composées. Formules de réduction de tous les calculs.*—Cet angle est, avons-nous dit, celui que font entre elles les directions des deux rayons de courbure en deux points M, M′ infiniment voisins. Nous l'avons appelé $\frac{ds}{\mathfrak{R}}$, ds étant la distance MM′.

Cherchons-en la valeur.

Les cosinus des angles faits avec les trois axes des x, y, z, par le rayon de courbure en M, sont [formule (8) du n° 6]

$$\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}, \qquad \frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}, \qquad \frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Ceux des angles faits par le rayon de courbure en M′ sont les trois mêmes quantités augmentées de leurs différentielles respectives.

Donc, d'après le raisonnement du n° 6, qui a conduit à la formule (9), on aura, pour l'angle infinitésimal cherché,

$$(15) \qquad \frac{ds}{\mathfrak{R}} = \sqrt{\left(d.\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}.$$

Si, pour le rayon de courbure ρ, on met une de ses valeurs, tirées des formules (1), (4), (9) de la première partie, on est conduit à un calcul qui prend un développement excessif, surtout si [comme il faut bien le faire pour conserver la généralité] on fait varier ds ainsi que les autres différentielles. On peut, après une longue analyse, ne pas apercevoir encore comment arriver à un résultat simple, et faire entrer la cambrure $\frac{1}{v}$, dont l'angle $\frac{ds}{\mathcal{R}}$ doit cependant dépendre.

Cherchons d'autres expressions de $\frac{ds}{\mathcal{R}}$. On y parvient facilement par des considérations tout à fait analogues à celles qui ont été employées aux n^{os} **3**, **4**, **5**, **6**, pour déterminer $\frac{ds}{\rho}$.

Menons, en effet, par un point quelconque, des parallèles aux deux rayons de courbure en M, M′, et dans le sens où ces rayons sont eux-mêmes tirés de la courbe aux centres de courbure (n° **12**) : portons sur elles des longueurs égales, non pas à l'unité, mais à

$$\frac{ds}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{\rho} + d\frac{ds}{\rho}.$$

Les projections de la première sur les trois axes seront, d'après ce qui a été démontré au n° **6**,

$$d\frac{dx}{ds}, \quad d\frac{dy}{ds}, \quad d\frac{dz}{ds}.$$

Celles de la seconde seront [d'après un raisonnement semblable]

$$d\frac{dx}{ds} + d^2\frac{dx}{ds}, \quad d\frac{dy}{ds} + d^2\frac{dy}{ds}, \quad d\frac{dz}{ds} + d^2\frac{dz}{ds}.$$

Donc la diagonale du parallélogramme formé sur ces deux petites lignes aura pour projections, sur les axes coordonnés x, y, z,

$$d^2\frac{dx}{ds}, \quad d^2\frac{dy}{ds}, \quad d^2\frac{dz}{ds}.$$

Et les projections, sur les trois plans yz, zx, xy, de l'aire de ce parallélogramme infinitésimal, prise du côté de son plan où l'on voit à gauche la

parallèle au premier rayon en se plaçant au point d'où on les a menées, seront (n° 3)

$$d\frac{dy}{ds}\,d^2\frac{dz}{ds} - d\frac{dz}{ds}\,d^2\frac{dy}{ds},$$

et deux autres quantités analogues, c'est-à-dire ce que nous avons désigné (n° 12) par

$$X'_s,\quad Y'_s,\quad Z'_s.$$

L'aire non projetée sera la racine carrée de la somme de ces quantités ; et elle doit être égale au produit $\frac{ds}{\rho}\left(\frac{ds}{\rho}+d\frac{ds}{\rho}\right)$ des deux côtés adjacents, multiplié par l'angle infiniment petit $\frac{ds}{\mathfrak{R}}$, qu'ils font entre eux. Donc, en supprimant une quantité du quatrième ordre, on a

$$\frac{ds^3}{\rho^2\mathfrak{R}} = \sqrt{X'^2_s + Y'^2_s + Z'^2_s}. \tag{16}$$

Si l'on projette successivement la diagonale du même parallélogramme, sur un de ses côtés, et sur une perpendiculaire menée dans son plan, comme on a fait au n° 5, on aura

$$d\frac{ds}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{\rho}\frac{ds}{\mathfrak{R}}$$

pour les deux projections ; d'où, pour déterminer $\frac{ds}{\mathfrak{R}}$, cette troisième formule, analogue à celle (4), qui donne $\frac{ds}{\rho}$, de même que celles (15), (16) sont analogues à (9) et à (1) :

$$\frac{ds^2}{\rho\mathfrak{R}} = \sqrt{\left(d^2\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d^2\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d^2\frac{dz}{ds}\right)^2 - \left(d\frac{ds}{\rho}\right)^2}. \tag{17}$$

Mais si l'on essaye de développer les formules (16), (17) que nous venons d'obtenir, on tombe dans une complication aussi grande qu'en développant celle (15), et l'on peut rester longtemps sans entrevoir le moyen de simplifier les résultats.

Cette difficulté, qui se présente dans presque toutes les recherches ana-

lytiques sur les propriétés générales des courbes dans l'espace, cesse enfin pour celui qui en a fait un très-grand nombre. Il remarque que certaines combinaisons qui se présentent très-souvent, sont réductibles à d'autres, et, pourvu qu'il consulte fréquemment les formules de réduction qu'il a déjà trouvées, il finit par amener ses résultats à des formes simples et inattendues.

Je crois donc faire une chose utile en donnant à part, dans une Note (*), un tableau des formules de transformation et de réduction que fournit la combinaison des expressions données dans la première partie, et qui servent à rendre praticables les divers calculs qui peuvent se présenter. J'ai été dans le cas de faire usage de presque toutes, et j'y renverrai souvent dans ce qui va suivre. On y verra qu'en laissant ds en dénominateur sous dx, dy, dz, on rend les calculs presque aussi simples lorsqu'on le suppose variable que lorsqu'on le suppose constant. On y verra aussi que c'est par les formules *nouvelles,* désignées (l') à ce tableau, savoir :

$$X'_s = \frac{1}{\rho^2}\left(X + \frac{dx\,ds^2}{v}\right), \qquad Y'_s = \frac{1}{\rho^2}\left(Y + \frac{dy\,ds^2}{v}\right), \qquad Z'_s = \frac{1}{\rho^2}\left(Z + \frac{dz\,ds^2}{v}\right),$$

que l'on introduit le plus ordinairement la ligne v dans les résultats pour les simplifier.

En se servant des formules (x'), (m'), (ν') (*voir* le tableau) qui sont des conséquences des trois (l') qu'on vient d'écrire, on réduit les trois expressions (15), (16), (17) ci-dessus à

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{ds}{\mathcal{R}} = \sqrt{\dfrac{ds^2}{\rho^2} + \dfrac{ds^2}{v^2}} \\ \text{ou} \quad \dfrac{1}{\mathcal{R}^2} = \dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{v^2}. \end{array} \right.$$

14. *Droite rectifiante, et plan rectifiant.* — La droite menée par le point M, perpendiculairement aux directions des deux rayons de courbure en M et M′, est nécessairement normale au plan du petit parallélogramme considéré au numéro précédent, et dont l'aire a X'_s, Y'_s, Z'_s pour projections sur les trois plans coordonnés.

(*) Note II à la fin du Mémoire, *à voir avant ce qui va suivre.*

Les cosinus des angles que fait, avec les demi-axes positifs des x, y, z, cette droite rectifiante supposée tirée comme on a dit aux n^{os} **12**, **13**, sont donc proportionnels à

$$X'_s, \quad Y'_s, \quad Z'_s.$$

et de mêmes signes que ces trois quantités.

On arrive au même résultat, sauf la distinction du signe, en considérant la rectifiante comme l'intersection de deux *plans rectifiants* consécutifs. Le plan rectifiant en M est perpendiculaire au rayon de courbure au même point; comme les cosinus des angles de ce rayon avec les trois axes sont proportionnels à $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$, l'équation du plan sera

$$(19) \qquad (\xi - x)\, d\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\, d\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\, d\frac{dz}{ds} = 0.$$

Le plan rectifiant au point suivant M′ de la courbe aura pour équation ce que devient celle-ci en y mettant $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ à la place de x, y, z, ou

$$\left.\begin{aligned}(\xi - x - dx)\left(d\frac{dx}{ds} + d^2\frac{dx}{ds}\right) + (\eta - y - dy)\left(d\frac{dy}{ds} + d^2\frac{dy}{ds}\right)\\ + (\zeta - z - dz)\left(d\frac{dz}{ds} + d^2\frac{dz}{dz}\right)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Prises ensemble, ces deux équations représentent l'intersection. La seconde équation, appliquée ainsi aux points communs des deux plans, peut être simplifiée au moyen de la première, et l'on peut y supprimer aussi le trinôme $dx d\frac{dx}{ds} + dy\, d\frac{dy}{ds} + dz\, d\frac{dz}{ds}$, qui est $= 0$ [Note II, form. (h)] et le trinôme $dx d^2\frac{dx}{ds} + dy d^2\frac{dy}{ds} + dz d^2\frac{dz}{ds}$, qui est infiniment petit de l'ordre supérieur à ce qui reste. On a ainsi pour l'équation qui, avec celle (19), détermine l'intersection des deux plans :

$$(20) \qquad (\xi - x)\, d^2\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\, d^2\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\, d^2\frac{dz}{ds} = 0.$$

Éliminant $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ avec (19) on a, pour la droite rectifiante en

M, ces équations plus simples et conformes à ce qu'on vient de trouver:

$$\frac{\xi-x}{X'_s}=\frac{\eta-y}{Y'_s}=\frac{\zeta-z}{Z'_s}. \tag{21}$$

Les cosinus des angles de cette droite, tirée comme on a dit tout à l'heure, avec les trois demi-axes positifs des x, y, z sont donc, en regardant le radical comme positif,

$$\frac{X'_s}{\sqrt{X'^2_s+Y'^2_s+Z'^2_s}},\qquad \frac{Y'_s}{\sqrt{X'^2_s+Y'^2_s+Z'^2_s}},\qquad \frac{Z'_s}{\sqrt{X'^2_s+Y'^2_s+Z'^2_s}}, \tag{22}$$

qui peuvent s'écrire, d'après l'expression (16), en regardant $\mathfrak{R}$ comme toujours positif,

$$\frac{\rho^2\mathfrak{R}X'_s}{ds^3},\qquad \frac{\rho^2\mathfrak{R}Y'_s}{ds^3},\qquad \frac{\rho^2\mathfrak{R}Z'_s}{ds^3}, \tag{23}$$

ou encore, d'après les formules (l'), (m') du tableau de la Note II, et l'expression (18) de $\frac{1}{\mathfrak{R}}$, en regardant également le nouveau radical comme positif,

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\rho X}{ds^3}+\frac{1}{\nu}\frac{dx}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\nu^2}}}=\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\rho X}{ds^3}+\frac{1}{\nu}\frac{dx}{ds}}{\frac{1}{\mathfrak{R}}},\qquad \frac{\frac{1}{\rho}\frac{\rho Y}{ds^3}+\frac{1}{\nu}\frac{dy}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\nu^2}}},\qquad \frac{\frac{1}{\rho}\frac{\rho Z}{ds^3}+\frac{1}{\nu}\frac{dz}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\nu^2}}}. \tag{24}$$

La première de ces expressions (24), qu'on peut considérer comme celle du cosinus de l'angle fait avec le plan yz par un plan perpendiculaire à la droite rectifiante, étant comparée avec celles $\frac{\rho X}{ds^3}$ et $\frac{dx}{ds}$ (nos 5 et 6) des cosinus des angles que font le plan osculateur et le plan normal en M avec le même plan coordonné yz, montre que, si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, a désignent ces trois angles finis, ou, généralement, ceux que font avec un plan quelconque, respectivement *le plan du petit angle* $\frac{ds}{\mathfrak{R}}$ (parallèle aux deux rayons de courbure consécutifs), *le plan de la courbure* ou du petit angle $\frac{ds}{\rho}$ (le plan osculateur), et *le plan de la cambrure* ou du petit angle $\frac{ds}{\nu}$ (le plan normal), on a, entre ces trois angles finis et ces trois angles infinitésimaux, la relation

$$\frac{ds}{\mathfrak{R}}\cos\mathfrak{A}=\frac{ds}{\rho}\cos\alpha+\frac{ds}{\nu}\cos\mathfrak{a},$$

qui montre, ainsi que celle $\frac{1}{\mathcal{R}^2}=\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}$ de la fin du numéro précédent, que *l'inclinaison mutuelle des rayons de courbure consécutifs est (conformément au nom que nous lui avons donné) une sorte de* résultante *des petits angles de courbure et de cambrure,* composés *comme des forces, ou plutôt comme des aires, tant pour la grandeur que pour la direction.*

15. *Angles de la rectifiante avec la tangente et avec la binormale.* — On obtiendra les cosinus de ces angles H et I en ajoutant ensemble les expressions (24), multipliées respectivement par $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et par $\frac{\rho X}{ds^2}, \frac{\rho Y}{ds^2}, \frac{\rho Z}{ds^2}$. On a ainsi, au moyen des formules (g), (m), (q) du tableau de la Note II,

$$\cos H=\frac{\mathcal{R}}{\tau}, \qquad \cos I=\frac{\mathcal{R}}{\rho}.$$

Ce sont les deux projections, sur la tangente et sur la binormale, de l'unité portée sur la rectifiante qui se trouve dans leur plan, et dont ces expressions fixent complétement la direction et le sens. La première change de signe avec τ, et la seconde a toujours le signe $+$, en sorte que l'angle H, toujours positif, est tantôt aigu, tantôt obtus, selon que τ est positif ou négatif; et l'angle I, toujours aigu, est positif ou négatif dans les mêmes cas. On a $\sin H=\cos I$ dans l'un comme dans l'autre cas. Donc on a ces expressions, *où le radical est toujours positif:*

$$(25)\quad \operatorname{tang} H=\frac{\tau}{\rho}, \quad \cos H=\frac{\mathcal{R}}{v}=\frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}}, \quad \sin H=\cos I=\frac{\mathcal{R}}{\rho}=\frac{1}{\rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}};$$

$$(26)\qquad dH=\cos^2 H d\frac{\tau}{\rho}=-\sin^2 H d\frac{\rho}{v}=\frac{1}{\cos H}d\frac{\mathcal{R}}{\rho}=-\frac{1}{\sin H}d\frac{\mathcal{R}}{\tau}.$$

Et la droite rectifiante se construit en portant sur la tangente en M une longueur égale à ρ, à partir de M et du côté de M′ ou du côté opposé, suivant que τ est positif ou négatif, puis élevant, à l'extrémité, une perpendiculaire d'une longueur τ au plan osculateur, du même côté que la binormale (nos **4**, **12**), et joignant M à l'extrémité de cette perpendiculaire. Ce théorème est encore de Lancret, sauf la distinction des signes et des sens. Il nous servira, à la troisième partie, à décrire deux cônes osculateurs de la courbe et de la surface de ses tangentes.

16. *Angle de deux droites rectifiantes consécutives.* — D'après le raisonnement du n° 6, et d'après les expressions (22), le carré de ce petit angle doit être

$$\left(d.\frac{X'_s}{\sqrt{X'^2_s+Y'^2_s+Z'^2_s}}\right)^2+\left(d.\frac{Y'_s}{\sqrt{\quad\quad}}\right)^2+\left(d.\frac{Z'_s}{\sqrt{\quad\quad}}\right)^2;$$

donc, d'après la formule (i'') du tableau de la Note II, et les expressions (25), (26), cet angle a pour valeur

$$\frac{\rho^2 d\frac{\rho}{v}}{\rho^2+v^2}=d\mathrm{H}. \tag{27}$$

Il est nul lorsque l'angle H, ou le rapport $\frac{v}{\rho}$ de la courbure à la cambrure, est constant. Alors les diverses droites rectifiantes sont les arêtes d'un cylindre, et la courbe est une *hélice* à base quelconque, ou une courbe dont les tangentes font toutes le même angle avec un certain plan.

L'hélice à base circulaire, ayant même centre et même rayon de courbure, et même cambrure que la courbe donnée, est celle que l'on appelle *osculatrice* à celle-ci, au point M. La rectifiante est l'arête de son cylindre.

17. *Arête de rebroussement de la surface rectifiante.* — Cherchons un point de cette arête. Il peut être considéré à volonté comme l'intersection des trois plans rectifiants en M, M′, M″, ou comme l'intersection des deux droites rectifiantes en M, M′.

L'équation du premier des trois plans est celle (19) du n° 14. L'équation du second plan, combinée avec celle du premier, donne celle plus simple (20). Si l'on change, dans ces deux équations, x, y, z en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, on aura deux autres équations qui appartiendront également au point commun des trois plans: la première, combinée avec (19), se réduit à (20); la seconde, qui est $(\xi-x-dx)\left(d^2\frac{dx}{ds}+d^3\frac{dx}{ds}\right)+\ldots=0$, se simplifie aussi au moyen de (20), et l'on peut, après l'avoir développée, remplacer $dxd^2\frac{dx}{ds}+dyd^2\frac{dy}{ds}+dzd^2\frac{dz}{ds}$ par $-\frac{ds^3}{\rho^2}$ [formule (v) du tableau], et supprimer les termes tels que $dxd^3\frac{dx}{ds}$ qui sont infiniment petits par rapport aux autres. On a ainsi, pour déterminer les coordonnées ξ, η, ζ du point de

rencontre des trois plans, les trois équations

$$(\xi - x)\, d\,\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\, d\,\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\, d\,\frac{dz}{ds} = 0,$$
$$(\xi - x)\, d^2\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\, d^2\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\, d^2\frac{dz}{ds} = 0,$$
$$(\xi - x)\, d^3\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\, d^3\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\, d^3\frac{dz}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}.$$

Elles donnent :

$$\xi - x = \frac{-X'_s\frac{ds^3}{\rho^2}}{X'_s d^3\frac{dx}{ds} + Y'_s d^3\frac{dy}{ds} + Z'_s d^3\frac{dz}{ds}}, \quad \eta - y = \frac{-Y'_s\frac{ds^3}{\rho^2}}{\text{Même dén.}}, \quad \zeta - z = \frac{-Z'_s\frac{ds^3}{\rho^2}}{\text{Même dén.}}.$$

La formule (d'') du tableau de la Note II donne la valeur du dénominateur commun en fonction des deux affections $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\nu}$. En la substituant, ces expressions deviennent

$$(28) \quad \xi - x = -\frac{\rho^3 X'_s}{ds^2 d\frac{\rho}{\nu}}, \qquad \eta - y = -\frac{\rho^3 Y'_s}{ds^2 d\frac{\rho}{\nu}}, \qquad \zeta - z = -\frac{\rho^3 Z'_s}{ds^2 d\frac{\rho}{\nu}}.$$

Cherchons maintenant les mêmes coordonnées ξ, η, ζ en regardant le point auquel elles appartiennent comme l'intersection de droites rectifiantes. Combinons, pour cela, celles (21) de la droite en M :

$$Y'_s(\zeta - z) - Z'_s(\eta - y) = 0,$$
$$Z'_s(\xi - x) - X'_s(\zeta - z) = 0,$$
$$X'_s(\eta - y) - Y'_s(\xi - x) = 0$$

avec celles qu'on en tire pour la droite suivante en mettant $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ pour x, y, z, et qui se réduisent, moyennant celles-ci, et en ayant égard à ce que l'on a [formule (p') du tableau]

$$Y'_s\, dz - Z'_s\, dy = \frac{ds^3}{\rho^2} d\frac{dx}{ds},$$

à

$$dY'_s(\zeta - z) - dZ'_s(\eta - y) = \frac{ds^3}{\rho^2}\, d\frac{dx}{ds}$$

(et deux autres équations analogues).

Nous obtenons ainsi ces deux valeurs pour $\xi - x$:

$$-\frac{X'_s \frac{ds^3}{\rho^2} d\frac{dy}{ds}}{Z'_s dX'_s - X'_s dZ'_s} \quad \text{et} \quad -\frac{X'_s \frac{ds^3}{\rho^2} d\frac{dz}{ds}}{X'_s dY'_s - Y'_s dX'_s}.$$

Elles s'accordent (parce que les deux droites se coupent) quand on met, pour les dénominateurs, leurs valeurs tirées du tableau [formules (g'')], et l'on a les expressions (28) déjà trouvées.

En ajoutant les carrés de $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, on aurait le carré de la distance désignée par L (n° **12**) du point M de la courbe donnée, au point correspondant de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante. Mais, pour éviter l'ambiguïté des signes, nous mettrons les expressions (28) sous la forme suivante, au moyen de celles (25), (26),

$$\xi - x = \frac{ds \sin H}{dH} \cdot \frac{\rho^2 \mathcal{R} X'_s}{ds^3}, \quad \eta - y = \frac{ds \sin H}{dH} \cdot \frac{\rho^2 \mathcal{R} Y'_s}{ds^3}, \quad \zeta - z = \frac{ds \sin H}{dH} \cdot \frac{\rho^2 \mathcal{R} Z'_s}{ds^3}.$$

Les seconds facteurs sont les cosinus (23) des angles de la rectifiante avec les demi-axes coordonnés. Donc on a, sans ambiguïté,

$$(29) \qquad L = \frac{ds \sin H}{dH},$$

distance qu'on doit porter, selon qu'elle est positive ou négative, sur la rectifiante prise dans son sens (n° **12**) ou sur son prolongement en arrière de M.

18. *Courbure, et cambrure de cette arête.* — Pour les calculer, il faut d'abord avoir la longueur de l'élément de cette courbe répondant à ds. Différentions pour cela les équations (28), nous aurons

$$d\xi = dx - d\frac{X'_s}{\frac{ds^2}{\rho^3} d\frac{\rho}{v}},$$

expressions que la formule (j'') du tableau réduit à une autre forme; en sorte qu'on a, pour les projections de l'élément sur les axes des x, y, z,

$$(30) \qquad d\xi = -\frac{\rho^3 X'_s}{ds^3} d\frac{ds}{d\frac{\rho}{v}}, \quad d\eta = -\frac{\rho^3 Y'_s}{ds^3} d\frac{ds}{d\frac{\rho}{v}}, \quad d\zeta = -\frac{\rho^3 Z'_s}{ds^3} d\frac{ds}{d\frac{\rho}{v}};$$

ou $-\frac{\rho}{\mathfrak{R}}\,d\frac{ds}{d\frac{\rho}{\tau}}$ multiplié successivement par les trois cosinus (23) des angles de la rectifiante avec les mêmes axes. Donc la longueur de l'élément est

$$-\frac{\rho}{\mathfrak{R}}\,d\frac{ds}{d\frac{\rho}{\tau}}=\frac{1}{\sin H}\,d\frac{ds\sin^2 H}{dH}=\frac{d(L\sin H)}{\sin H}, \tag{31}$$

et son sens est le même que celui de la rectifiante quand cette expression est positive.

Divisant successivement cette longueur par l'angle dH de deux tangentes consécutives à l'arête, qui sont les droites rectifiantes (n° **16**), et par l'angle $\frac{ds}{\mathfrak{R}}=\frac{ds}{\rho\sin H}$ (n° **15**) de deux plans osculateurs à cette même courbe, qui sont les deux plans rectifiants de la courbe donnée en M et M′, on obtient :

Pour le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante,

$$\frac{\left(1+\frac{\rho^2}{\tau^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{d\frac{\rho}{\tau}}\,d\frac{ds}{d\frac{\rho}{\tau}}=\frac{d(L\sin H)}{\sin H dH}; \tag{32}$$

et pour son rayon de cambrure,

$$-\frac{\rho}{ds}\,d\frac{ds}{d\frac{\rho}{\tau}}=\frac{\rho d(L\sin H)}{ds}. \tag{33}$$

19. *Plus courte distance de deux rayons de courbure consécutifs de la courbe donnée.* — Les rayons de courbure ne se rencontrent pas deux à deux comme les tangentes ou comme les droites rectifiantes; ils forment une surface réglée gauche ou non développable. Cherchons la longueur infiniment petite de la plus courte distance de deux rayons consécutifs et sa position.

Les rayons en M et en M′ ont respectivement pour équations

$$\frac{\xi-x}{d\frac{dx}{ds}}=\frac{\eta-y}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{\zeta-z}{d\frac{dz}{ds}}, \tag{34}$$

$$\frac{\xi-(x+dx)}{d\frac{dx}{ds}+d^2\frac{dx}{ds}}=\frac{\eta-(y+dy)}{d\frac{dy}{ds}+d^2\frac{dy}{ds}}=\frac{\zeta-(z+dz)}{d\frac{dz}{ds}+d^2\frac{dz}{ds}}. \tag{35}$$

En appliquant à ces deux équations la formule connue (*), on obtient, pour la plus courte distance, l'expression

$$\frac{X'_s dx + Y'_s dy + Z'_s dz}{\sqrt{X'^2_s + Y'^2_s + Z'^2_s}},$$

qui se réduit, au moyen des formules (m'), (n') du tableau de la Note II, à

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\iota^2}}} = ds \cos H. \tag{36}$$

Pour avoir les coordonnées du point où cette perpendiculaire commune rencontre l'un des deux rayons, le second par exemple, faisons passer par le premier un plan qui la contienne; le point où il coupera le second sera le point cherché. Il est facile d'avoir l'équation de ce plan, car sa normale devra être à angle droit : 1° sur la perpendiculaire commune, et, par conséquent, sur la droite rectifiante, dont les angles avec les trois axes ont des cosinus proportionnels à X'_s, Y'_s, Z'_s; 2° sur le premier rayon, dont les angles ont des cosinus proportionnels à $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$.

Donc (n° 11) l'équation de ce plan, qui passe par le point M, sera

$$\left.\begin{aligned}(\xi - x)\left(Y'_s d\frac{dz}{ds} - Z'_s d\frac{dy}{ds}\right) + (\eta - y)\left(Z'_s d\frac{dx}{ds} - X'_s d\frac{dz}{ds}\right)\\ + (\zeta - z)\left(X'_s d\frac{dy}{ds} - Y'_s d\frac{dx}{ds}\right)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Éliminant $\eta - y$, $\zeta - z$ entre cette équation et celles (35) du second rayon,

---

(*) En général, si $\frac{\xi - x}{a} = \frac{\eta - y}{b} = \frac{\zeta - z}{c}$ et $\frac{\xi - x'}{a'} = \frac{\eta - y'}{b'} = \frac{\zeta - z'}{c'}$ sont les équations de deux droites, leur plus courte distance est la distance d'un point quelconque de la première à un point quelconque de la seconde, projetée sur une troisième droite qui soit à angle droit sur toutes deux. Les cosinus des angles de celle-ci, avec les trois axes coordonnés, sont proportionnels à $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$, ainsi qu'il résulte du théorème cité n° 11. On a donc, pour la plus courte distance,

$$\frac{(x'-x)(bc'-cb') + (y'-y)(ca'-ac') + (z'-z)(ab'-ba')}{\sqrt{(bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2 + (ab'-ba')^2}}.$$

on obtient, eu égard à ce que [formule (k) du tableau] $dy\,d\frac{dz}{ds} - dz\,d\frac{dy}{ds} = \frac{X}{ds}$,

$$\frac{\xi - x - dx}{d\frac{dx}{ds} + d^2\frac{dx}{ds}} = \frac{X'_s\frac{X}{ds} + Y'_s\frac{Y}{ds} + Z'_s\frac{Z}{ds}}{X'^2_s + Y'^2_s + Z'^2_s}.$$

Le second membre se réduit, au moyen des formules (m'), (o') du tableau, à $\frac{\rho^2 v^2}{ds(\rho^2+v^2)}$, et l'on peut, dans le premier, effacer dx au numérateur, et $d^2\frac{dx}{ds}$ au dénominateur. On a ainsi, pour les coordonnées ξ, n, ζ du point où le rayon de courbure en M est le plus rapproché possible du suivant,

$$(37)\quad \xi - x = \frac{\rho v^2}{\rho^2+v^2}\cdot\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad n - y = \frac{\rho v^2}{\rho^2+v^2}\cdot\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \zeta - z = \frac{\rho v^2}{\rho^2+v^2}\cdot\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds};$$

et par conséquent, pour la distance de ce point au point M de la courbe,

$$(38)\qquad \rho\frac{v^2}{\rho^2+v^2} = \rho\sin^2 H;$$

et pour sa distance au centre de courbure,

$$(39)\qquad \rho\frac{\rho^2}{\rho^2+v^2} = \rho\cos^2 H.$$

Nous nous occuperons, à la troisième partie, de la courbe formée par l'ensemble de points semblables; nous nous bornerons ici à calculer la longueur de son élément ou de la distance des deux points ainsi placés sur le rayon de courbure en M et sur le rayon de courbure en M'; elle a, pour projections sur les trois axes, les longueurs de $d\xi$, dn, $d\zeta$ tirées des équations (37). On trouve, en se servant des formules (u') du tableau, et réduisant ensuite ce qui en provient avec le terme dx,

$$(40)\quad d\xi = \frac{ds}{v\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{v^2}}}\cdot\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\rho X}{ds^2} + \frac{1}{v}\frac{dx}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{v^2}}} + d\frac{\rho v^2}{\rho^2+v^2}\cdot\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad dn = \ldots,\quad d\zeta = \ldots;$$

en sorte que le petit élément est l'hypoténuse d'un triangle rectangle formé sur la plus courte distance $\frac{ds}{\iota\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\iota^2}}}$, qui fait, avec les axes, les angles dont les cosinus sont les expressions (24), et sur une petite ligne $d\frac{\rho\iota^2}{\rho^2+\iota^2}$ portée parallèlement à l'un des deux rayons (évidemment sur le second). La longueur $\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}$ de ce petit élément est

$$(41)\qquad \begin{cases} \sqrt{\frac{\rho^2 ds^2}{\rho^2+\iota^2}+\left(d.\frac{\rho\iota^2}{\rho^2+\iota^2}\right)^2}=\sqrt{(ds\cos \mathrm{H})^2+(d.\rho\sin^2\mathrm{H})^2} \\ \qquad\qquad =\sqrt{\left(\frac{\mathrm{R}\,ds}{\iota}\right)^2+\left(d.\frac{\mathrm{R}^2}{\rho}\right)^2}. \end{cases}$$

20. *Sphère osculatrice; son centre et son rayon.* — Cherchons le rayon et la position du centre de cette sphère. Nous avons dit (n° **12**) que ce centre se trouve à l'intersection de trois plans normaux consécutifs, ou, ce qui revient au même, à l'intersection de trois *droites polaires* consécutives.

L'équation du plan normal en M est

$$(\xi-x)\,dx+(\eta-y)\,dy+(\zeta-z)\,dz=0.$$

Pour en déduire celle du plan normal en M′, il suffit de changer x, y, z en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, ce qui donnera $(\xi-x-dx)(dx+d^2x)+\ldots=0$; comme il ne s'agit que d'avoir les points communs aux deux plans, on peut combiner cette nouvelle équation avec la première, de manière à la simplifier. On a ainsi, en supprimant les infiniment petits du troisième ordre,

$$(\xi-x)\,d^2x+(\eta-y)\,d^2y+(\zeta-z)\,d^2z=ds^2.$$

Nous pouvons, sans poser l'équation du troisième plan, éliminer $\zeta-z$, par exemple, entre celles-ci, ce qui nous donnera, pour l'une des équations de la droite polaire résultant de l'intersection des deux plans,

$$(\xi-x)\,\mathrm{Y}-(\eta-y)\,\mathrm{X}=dz\,ds^2,$$

et changer, dans cette équation, x, y, z en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, pour avoir une équation de la droite polaire suivante. On obtient ainsi

$$(\xi-x)\,(\mathrm{Y}+d\mathrm{Y})-(\eta-y)\,(\mathrm{X}+d\mathrm{X})=dz\,ds^2+d(dz\,ds^2)-(\mathrm{X}\,dy-\mathrm{Y}\,dx).$$

Le second membre, moyennant la formule (a') du tableau, qui change $\mathrm{X}dy - \mathrm{Y}dx$ en $ds^3 d\frac{dz}{ds}$, se réduit à

$$dz\,ds^2 + \frac{dz}{ds}\,d(ds^3);$$

en sorte qu'en combinant cette équation avec la précédente, on obtient, pour la coordonnée ξ du centre de la sphère,

$$(42) \qquad \xi - x = \frac{\mathrm{X}\frac{dz}{ds}d.ds^3 - d\mathrm{X}\,dz\,ds^3}{\mathrm{X}d\mathrm{Y} - \mathrm{Y}d\mathrm{X}} = \frac{3\mathrm{X}\,ds\,d^2s - ds^2 d\mathrm{X}}{\mathrm{X}d^2x + \mathrm{Y}d^2y + \mathrm{Z}d^2z}.$$

On aurait pour η, ζ des formules analogues, et ces expressions reviennent à celles de Monge (Mémoire cité de 1771, XXIV).

On ne pourrait en déduire le rayon R de la sphère osculatrice sans s'engager dans des calculs extrêmement compliqués; mais on simplifie ces expressions en remarquant que $3\mathrm{X}ds\,d^2s - ds^2 d\mathrm{X}$ revient à $-ds^5 d\frac{\mathrm{X}}{ds^3}$, et en remplaçant le trinôme du dénominateur par sa valeur en fonction de la courbure et de la cambrure, valeur qui est $\frac{ds^6}{\rho^2\nu}$; elles deviennent ainsi

$$(43)\ \xi - x = -\frac{\rho^2\nu}{ds}\,d\frac{\mathrm{X}}{ds^3}, \qquad \eta - y = -\frac{\rho^2\nu}{ds}\,d\frac{\mathrm{Y}}{ds^3}, \qquad \zeta - z = -\frac{\rho^2\nu}{ds}\,d\frac{\mathrm{Z}}{ds^3},$$

et elles sont susceptibles d'être transformées encore au moyen de celles $d\frac{\rho\mathrm{X}}{ds^3} = -\frac{\rho}{\nu}\,d\frac{dx}{ds}$ [(s') du tableau], d'où l'on tire la valeur de $d\frac{\mathrm{X}}{ds^3}$ et deux valeurs analogues pour $d\frac{\mathrm{Y}}{ds^3}$, $d\frac{\mathrm{Z}}{ds^3}$; ce qui donne, en substituant,

$$(44)\ \xi - x = \rho\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{\nu d\rho}{ds}\cdot\frac{\rho\mathrm{X}}{ds^3}, \quad \eta - y = \rho\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{\nu d\rho}{ds}\cdot\frac{\rho\mathrm{Y}}{ds^3}, \quad \zeta - z = \rho\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{\nu d\rho}{ds}\cdot\frac{\rho\mathrm{Z}}{ds^3}.$$

Ces expressions donnent le moyen de déterminer géométriquement, d'une manière simple, le centre de la sphère osculatrice; en effet, $\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}$ et les deux autres quantités semblables sont les cosinus des angles que fait le rayon de courbure avec les trois axes des x, y, z, tandis que $\frac{\rho\mathrm{X}}{ds^3}$ et les deux autres

quantités semblables sont les cosinus des angles que fait la binormale (n° 12) avec les mêmes axes. On voit que, si par le centre de courbure on élève sur le plan osculateur une perpendiculaire d'une longueur égale à

$$\frac{\nu d\rho}{ds},$$

l'extrémité de cette parallèle à la binormale, tirée dans son sens, sera le centre de la sphère osculatrice.

En ajoutant les carrés des expressions (44), on obtient le carré de l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur cette ligne et sur le rayon de courbure, ou le carré du rayon R de la sphère osculatrice. On a donc cette expression simple (que l'on prend toujours positivement)

$$\text{(45)} \qquad R = \sqrt{\rho^2 + \left(\nu \frac{d\rho}{ds}\right)^2}.$$

La tangente de l'angle formé par le rayon de la sphère avec le rayon de courbure est

$$\text{(46)} \qquad \frac{\nu d\rho}{\rho ds} \text{ (*)}.$$

Si l'on veut avoir le cosinus de l'angle formé même par le rayon R et par la perpendiculaire commune aux deux rayons de courbure, on n'a qu'à multiplier, deux à deux, les expressions (44) et les cosinus (24) des angles formés par la rectifiante avec les trois axes coordonnés, et qu'à ajouter les résultats divisés par R. On obtient ainsi, eu égard aux réductions résultant des formules (h), (m), (q) du tableau, pour ce cosinus,

$$\text{(47)} \qquad \frac{1}{\rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\nu^2}}} \cdot \frac{\nu \frac{d\rho}{ds}}{R} = \sin H \cdot \frac{\nu d\rho}{R ds} = \sin H \sin\left(\widehat{R,\rho}\right).$$

21. *Lieu des centres des sphères osculatrices, ou arête de rebroussement de la surface polaire* [*appelée aussi développée par le plan*]. — Pour

(*) Les expressions nouvelles (45) et (46) pourraient être déduites de celles moins simples que M. Olivier a données dans son Mémoire du 24e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 72.

avoir la longueur de l'élément de cette courbe, répondant à l'élément ds de la courbe donnée, sans faire sur ces deux courbes aucune particularisation, il faut différentier les expressions (44) des coordonnées ξ, η, ζ du centre de la sphère osculatrice. On a ainsi, eu égard aux formules (s'), (u') du tableau,

$$d\xi = \left(\frac{\rho\, ds}{\nu} + d\,\frac{\nu d\rho}{ds}\right)\cdot\frac{\rho X}{ds^2}, \quad d\eta = \ldots; \quad d\zeta = \ldots;$$

ce qui donne, pour l'élément dont ces trois quantités sont les projections,

$$\frac{\rho}{\nu}\,ds + d\,\frac{\nu d\rho}{ds}, \tag{48}$$

quantité qui sera portée, si elle est positive, sur la droite polaire tirée dans le même sens que la binormale à laquelle cette droite est parallèle.

Si l'on veut avoir le rayon de courbure et le rayon de cambrure de cette même ligne courbe, il faut diviser l'élément, successivement, par l'angle des deux tangentes consécutives, et par l'angle des deux plans osculateurs consécutifs.

Ces deux angles sont, respectivement, $\frac{ds}{\nu}$ et $\frac{ds}{\rho}$; en effet, comme l'a observé Fourier, les deux tangentes à la courbe dont nous nous occupons sont des droites perpendiculaires aux deux plans osculateurs à la courbe donnée, et font le même angle que ceux-ci; et les deux plans osculateurs de cette même courbe, lieu des centres des sphères osculatrices, sont perpendiculaires aux deux tangentes à la courbe donnée, et font par conséquent le même angle que ces tangentes.

On a donc, pour le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de la surface polaire,

$$\nu\left(\frac{\rho}{\nu} + \frac{1}{ds}\cdot d\,\frac{\nu d\rho}{ds}\right) = \frac{R\,dR}{d\rho}\ (*); \tag{49}$$

(*) Il est facile d'avoir les coordonnées ξ', η', ζ' du centre de courbure de cette arête; car, ainsi que l'a remarqué récemment M. Lemonnier (*Nouv. Ann. de math.* de MM. Terquem et Gérono, novembre 1845, p. 611), son rayon de courbure est parallèle à celui de la courbe donnée, puisque son plan osculateur et son plan normal ne sont autre chose que le plan normal et un plan parallèle au plan osculateur de la courbe donnée. On a donc, d'après les expressions (44), (49),

$$\xi' - x = \rho\,\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{\nu d\rho}{ds}\,\frac{\rho X}{ds^2} - \nu\left(\frac{\rho}{\nu} + \frac{1}{ds}\,d\,\frac{\nu d\rho}{ds}\right)\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{\nu d\rho}{ds}\cdot\frac{\rho X}{d\rho^2} - \frac{\nu}{ds}\,d\,\frac{\nu d\rho}{ds}\cdot\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta' - y = \ldots, \quad \zeta' - z = \ldots.$$

et pour son rayon de cambrure,

$$(50)\qquad \rho\left(\frac{\rho}{\nu}+\frac{1}{ds}\cdot d\frac{\nu\,d\rho}{ds}\right)=\frac{\rho}{\nu}\cdot\frac{R\,dR}{d\rho}.$$

Ce qui fait voir que la réciprocité, remarquée par Fourier, entre les deux *angles* de courbure et de cambrure de la courbe donnée, et de sa *développée par le plan,* ne s'étend pas à ces deux affections elles-mêmes, comme on l'a cru quelquefois (*). La courbure de la développée par le plan ne pourrait être égale à la cambrure de la courbe donnée, et réciproquement, qu'en des points isolés pour lesquels il y aurait égalité entre les longueurs des éléments correspondants ds et $\frac{\rho}{\nu}ds+d\frac{\nu\,d\rho}{ds}$, des arcs de ces deux courbes, ce qui exigerait qu'on eût, en ces points,

$$\frac{R\,dR}{\nu\,d\rho}=1.$$

22. *Lieu des centres de courbure.* — Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de courbure répondant au point M (x, y, z); on a, d'après les expressions (8),

$$\xi-x=\rho\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds},\qquad \eta-y=\rho\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds},\qquad \zeta-z=\rho\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

On peut, sans particulariser la courbe non plane donnée, trouver, au moyen de ces expressions, quelques propriétés de la ligne courbe de ces centres qui, comme on sait, n'en est point une développée.

Si l'on différentie, on a, eu égard aux formules (u') du tableau de la Note II,

$$(51)\qquad d\xi=\frac{\rho\,ds}{\nu}\cdot\frac{\rho X}{ds^2}+d\rho\cdot\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad d\eta=\ldots,\quad d\zeta=\ldots;$$

(*) M. Olivier, à la page 66 du Mémoire cité, dit très-bien que l'on ne saurait admettre que le rayon de courbure de l'arête de rebroussement soit le rayon de *flexion* (cambrure) de la courbe donnée; et M. Abel Transon remarque, dans une communication faite le 3 août 1844 à la Société philomatique (Journal *l'Institut*), que, faute d'avoir fait la distinction entre l'angle infinitésimal de deux plans osculateurs et l'affection mesurée par le rapport entre l'arc élémentaire de la courbe et cet angle, Lancret est tombé dans une erreur, article IV, et surtout article VI de son premier Mémoire, lorsqu'il dit qu'en développant la surface polaire, l'arête de rebroussement devenue plane a pour courbure, en chaque point, la *deuxième courbure* de la courbe donnée, quoiqu'il ait très-bien aperçu, plus loin, que les longueurs des arcs ne sont pas les mêmes.

d'où, pour la longueur $\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$ de l'élément de la courbe dont nous nous occupons,

$$(52) \qquad \sqrt{\left(\frac{\rho\, ds}{\nu}\right)^2 + d\rho^2} = \frac{R\, ds}{\nu}.$$

Cet élément, qui est la ligne de jonction de deux centres de courbure consécutifs, est donc placé sur la surface polaire, et, par conséquent, dans le plan normal en M à la courbe donnée, et il est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés, porté sur le second rayon de courbure, est l'excès $d\rho$ de ce rayon $\rho + d\rho$ sur le premier ρ, et dont l'autre côté, porté sur la droite polaire répondant à M, a pour longueur

$$\frac{\rho}{\nu} ds.$$

L'angle que la tangente à cette courbe fait avec la *binormale* à la courbe donnée, qui est parallèle à la droite polaire, a pour cosinus le quotient de cette expression par la précédente, ou

$$\frac{\rho}{R};$$

en sorte que cet angle est égal à celui que fait le rayon de courbure avec le rayon de la sphère osculatrice.

Et l'angle formé par la même tangente à la courbe des centres de courbure avec le rayon de la sphère osculatrice, qu'elle va couper quelque part (puisque ces deux droites sont, l'une et l'autre, dans le plan normal à la courbe donnée), a pour cosinus la somme des produits, deux à deux, des projections (44) du rayon de la sphère, et des projections (51) de l'élément, divisée par ce rayon R, et par cet élément $\frac{R\, ds}{\nu}$, c'est-à-dire

$$(53) \quad \frac{1}{R.\frac{R\, ds}{\nu}}\left[\left(\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{\nu\, d\rho}{ds}.\frac{\rho X}{ds^3}\right)\left(d\rho.\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{\rho\, ds}{\nu}.\frac{\rho X}{ds^3}\right) + (\ )(\ ) + (\ )(\ )\right]$$
$$= 2\frac{\rho}{R}.\frac{\nu\, d\rho}{R\, ds} = \sin 2\left(\arccos\frac{\rho}{R}\right).$$

On trouverait de même, au moyen des expressions (24), (51), (52), pour le cosinus de l'angle formé par la même tangente, avec la direction de la droite rectifiante, perpendiculaire commune aux deux rayons de courbure consécutifs,

$$(45) \qquad \frac{1}{R\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}} = \frac{\tau \cos H}{R} = \frac{\mathfrak{R}}{R}.$$

Ces divers résultats seront interprétés et démontrés géométriquement à la troisième partie. On voit que si nous y sommes arrivé analytiquement sans de longs calculs, c'est grâce à la précaution que nous avons prise de préparer d'avance un recueil (Note II) de formules de transformation et de réduction propre aux recherches sur les courbes dans l'espace.

TROISIÈME PARTIE.

Démonstration géométrique des mêmes théorèmes, et de quelques autres.

23. *Angle de deux rayons de courbure consécutifs.* — Reportons-nous aux définitions et aux notations du n° **12**, qui termine la première partie, sans plus nous occuper de la manière dont nous avions, aux numéros qui précédaient, exprimé en fonctions des différentielles des coordonnées d'un point quelconque d'une courbe dans l'espace, les angles $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{\tau}$, de deux tangentes consécutives et de deux plans osculateurs consécutifs, en des points M, M′ de la courbe dont la distance infiniment petite est ds; car, dans ce qui va suivre, nous ne ferons plus usage de coordonnées, et nous supposerons que les longueurs finies, désignées par ρ, τ, sont connues en chaque point de la courbe.

Cherchons à exprimer, au moyen de $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{\tau}$, l'angle, aussi infiniment petit, désigné par $\frac{ds}{\mathfrak{R}}$, que forment ensemble les deux rayons de courbure aux points M, M′.

Soient trois éléments consécutifs MM′, M′M″, M″M‴ de la courbe (*fig.* 4).

Appelons P le plan MM'M'' des deux premiers, ou le plan osculateur en M, et P' le plan M'M''M''' des deux derniers, ou le plan osculateur en M'.

Par le point de concours M' des deux premiers éléments, menons trois droites :

1°. L'une M'C, dans le premier plan P, perpendiculairement au premier élément MM' : elle sera parallèle au rayon de courbure en M;

2°. L'autre M'C' dans le deuxième plan P', perpendiculairement au deuxième élément M'M'' : ce sera le rayon de courbure en M';

3°. La troisième M'B, *dans le premier plan* P, perpendiculairement *au deuxième élément* M'M''.

Celle-ci fera, avec la première MC, un angle $\frac{ds}{\rho}$, puisqu'elles sont perpendiculaires respectivement aux deux premiers éléments, et situées dans leur plan P; et elle fera, avec la seconde M'C', un angle $\frac{ds}{\tau}$, puisqu'elles sont comprises dans deux plans osculateurs consécutifs, et perpendiculaires à leur intersection commune; en sorte que leur angle est le même que celui des deux plans. Quant aux deux premières, leur angle sera celui des deux rayons de courbure. On a donc les angles

$$BM'C = \frac{ds}{\rho}, \quad BM'C' = \frac{ds}{\tau}, \quad CM'C' = \frac{ds}{\mathfrak{R}}.$$

Ces trois angles infinitésimaux sont mesurés respectivement par les petites lignes

$$BC, \quad BC', \quad CC',$$

si l'on suppose que les trois droites, menées du point M', ont pour longueur l'unité.

Or, le petit triangle CBC', dont le plan peut être considéré comme perpendiculaire à l'une quelconque des trois droites, à la troisième M'B par exemple, est rectangle en B, puisque le plan BM'C', formé sur deux droites perpendiculaires au second élément M'M'', est perpendiculaire au plan BM'C de la première et de la troisième droite, qui n'est autre chose que le plan P contenant cet élément M'M''.

Donc

$$\overline{CC'}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BC'}^2,$$

ou

$$\frac{ds^2}{\mathcal{R}^2} = \frac{ds^2}{\rho^2} + \frac{ds^2}{\nu^2}.$$

De plus, comme la petite base de la pyramide triangulaire MBCC′ est négligeable devant ses faces, et comme celles-ci ont pour aires les trois angles au sommet $\frac{ds}{\mathcal{R}}, \frac{ds}{\rho}, \frac{ds}{\nu}$, on voit que la projection du petit angle $\frac{ds}{\mathcal{R}}$ sur un plan quelconque est égale à la somme des projections des deux petits angles de courbure et de cambrure $\frac{ds}{\rho}, \frac{ds}{\nu}$ sur le même plan.

Ces deux résultats, démontrés analytiquement aux n^{os} **13** et **14**, motivent la dénomination d'*angle de courbure et cambrure composées,* que nous donnons quelquefois à la rotation $\frac{ds}{\mathcal{R}}$ du rayon de courbure, en raison de ce qu'elle est comme la *résultante* des rotations $\frac{ds}{\rho}, \frac{ds}{\nu}$ de la tangente et de la binormale.

24. *Angle de la droite* RECTIFIANTE, *perpendiculaire aux directions de deux rayons de courbure, avec la tangente.* — Par les deux tangentes consécutives Mt, M′t' (*fig.* 5), faisons passer les deux plans dits *rectifiants,* respectivement perpendiculaires aux plans osculateurs en M, M′, et, par conséquent, aux rayons de courbure aux mêmes points. Si, par un point b de leur intersection Mb, qui est la rectifiante dont nous nous occupons, on abaisse des perpendiculaires bt, bt' sur les tangentes Mt, Mt', elles seront perpendiculaires aussi aux plans osculateurs en M et en M′.

Donc on a leur angle

$$tbt' = \frac{ds}{\nu}.$$

Mais on a l'angle des deux tangentes

$$t\mathrm{M}'t' = \frac{ds}{\rho}.$$

Si donc, sur la tangente, on a la longueur Mt ou M′$t = \rho$, on aura la petite ligne $tt' = ds$, et la perpendiculaire $tb = \nu$.

Donc on a, pour l'angle H que forme, avec la tangente, la rectifiante M′b

ou Mb, qui est la droite perpendiculaire aux directions de deux rayons de courbure consécutifs :

$$\text{tang H} = \frac{\tau}{\rho},$$

d'où, en regardant comme positif le radical $\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}} = \frac{1}{\mathcal{R}}$ (ainsi que nous l'avons fait au n° 14),

$$\cos H = \frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}} = \frac{\mathcal{R}}{\tau}, \quad \sin H = \frac{1}{\rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}} = \frac{\mathcal{R}}{\rho},$$

comme on l'a démontré analytiquement au n° 15.

Ce théorème, et celui du numéro précédent, ont été démontrés par Lancret, d'une manière moins simple et moins directe, par des considérations de trigonométrie sphérique et des développements de cosinus en série.

Ils se vérifient mutuellement : car, d'après ce qu'on vient d'écrire, la perpendiculaire tk, abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse Mb, doit avoir la longueur $\mathcal{R}$; et, en effet, le petit angle $tkt' = \frac{ds}{tk}$, formé sur deux lignes sensiblement perpendiculaires à l'intersection des deux plans rectifiants, est bien l'angle que nous avons appelé $\frac{ds}{\mathcal{R}}$ au numéro précédent.

25. *Cônes osculateurs.* — Les divers plans osculateurs de la courbe donnée forment, par leurs intersections mutuelles, une surface développable dont l'arête de rebroussement est cette courbe elle-même. Cette surface *des tangentes* ou *des éléments* prolongés de la courbe donnée a le rapport le plus intime possible avec elle; elle est aux courbes non planes ce que leur propre plan est aux courbes planes.

Tout plan rectifiant coupe normalement cette surface suivant une de ses génératrices rectilignes, et la *surface rectifiante* formée par les intersections des plans rectifiants consécutifs est sa *développée,* comme l'a remarqué Lancret.

La surface rectifiante doit donc contenir tous les centres de courbure *principale* ou *maximum* de la surface des tangentes.

C'est ce qu'on peut voir facilement. La courbure principale de la surface des tangentes est égale, au point t par exemple (*fig.* 5), à l'angle des deux plans osculateurs qui lui sont tangents suivant ses génératrices Mt, M$'t'$, divisé par l'élément tt' de sa section faite normalement à Mt. Donc cette courbure est $\frac{1}{\nu}$, d'après ce qu'on a vu au numéro précédent, et le point b, appartenant à la droite rectifiante Mb, est un centre de *courbure principale* de la surface des tangentes. La même chose se vérifierait pour tous les autres points de Mb et des autres droites dont l'ensemble forme la surface rectifiante.

Décrivons donc un cercle du point b comme centre, avec le rayon $bt = \nu$. Il sera osculateur, en t, à la section de la surface des tangentes, faite par le plan qui le contient.

Si l'on imagine un cône oblique indéfini qui ait ce cercle pour base, et le point M de la courbe pour sommet, toute section circulaire de ce cône, faite perpendiculairement à son apothème Mt, donne le cercle de plus grande courbure de la surface des tangentes, au point où l'apothème est coupé. Comme la section normale de plus petite courbure, au même point, est la ligne droite Mt elle-même, suivant laquelle le cône touche la surface, il résulte du théorème d'Euler sur le rapport des courbures des diverses sections normales passant par le même point d'une surface, et du théorème de Meusnier sur le rapport des courbures des sections obliques aux courbures des sections normales passant par la même tangente à une surface, que toute section plane du cône aura un contact du second ordre avec la section de la surface dont nous nous occupons, par le même plan.

Donc le *cône oblique* en question est osculateur à cette surface des tangentes à la courbe, dans toute l'étendue de la génératrice commune.

On peut encore imaginer un *cône droit* qui ait pour axe la droite rectifiante Mb, et, comme l'autre, Mt pour apothème; il est également osculateur à la surface des tangentes, car le rayon kt de sa section circulaire, passant par le point t, est égal à $\nu \cos(ktb)$; et, en vertu du théorème de Meusnier, $\nu \cos(ktb)$ est aussi le rayon de courbure de la section de cette surface, faite par le plan du même cercle. Mais ce cône droit ne donne pas, comme le cône oblique, les cercles de courbure principale de la surface des tangentes, car les sections perpendiculaires aux génératrices de celles-ci sont elliptiques.

Ces deux cônes ont trois points communs avec la courbe donnée, comme il est facile de le prouver rigoureusement en posant leurs équations (*).

26. *Théorème général sur les surfaces développables.* — La section, soit du cône oblique, soit du cône droit du numéro précédent, par un plan perpendiculaire à son apothème et passant par son sommet, ou infiniment près de son sommet, a un rayon de courbure nul ou infiniment petit.

Donc *la section de la surface développable des tangentes, et, en général, de toute surface développable par un plan normal à l'arête de rebroussement, et même par tout plan ne passant pas par une de ses génératrices, possède, à la rencontre de cette courbe, un de ces points de rebroussement où le rayon de courbure est zéro et où la courbure est infinie.*

Je ne me souviens pas d'avoir vu ce théorème énoncé nulle part.

27. *Angle de deux droites rectifiantes. Arête de rebroussement de la surface rectifiante.* — Soient, aux deux points M, M′ de la courbe, MT, M′T′ (*fig.* 6) les deux tangentes, et M*l*, M′*l*′ les deux droites rectifiantes qui se rencontrent en *l*; on aura, pour l'angle infinitésimal que ces deux droites font l'une sur l'autre,

$$\mathrm{M}l\mathrm{M}' = l\mathrm{M}'\mathrm{T} - l\mathrm{MT}.$$

Le second lMT des deux angles finis qui sont dans le second membre n'est autre chose que l'angle H; le premier lM′T est égal à lM′T′, puisque le plan des deux tangentes peut être regardé comme perpendiculaire au plan de ces deux angles, et cet angle lM′T′ est H + dH. Donc on a, pour l'angle MlM′ de deux droites rectifiantes consécutives,

$$\mathrm{M}l\mathrm{M}' = d\mathrm{H},$$

comme nous l'avons trouvé analytiquement au n° **16**.

(*) M. Olivier (Mémoire de Géométrie descriptive. Construction des points d'inflexion d'une courbe tracée sur une surface développable, *Journal de l'École Polytechnique*, 22e cahier, note III, p. 119-120) parle de ces deux cônes osculateurs pour le cas de la surface des tangentes à l'hélice, et montre qu'on a également des cônes droits osculateurs pour une surface développable quelconque. Monge avait déjà observé qu'une surface développable peut être regardée comme composée d'une infinité d'éléments de surfaces coniques dont les sommets sont consécutivement placés sur son arête de rebroussement, et dont les axes sont les arêtes rectilignes de sa surface développée.

Une perpendiculaire MP′, menée du point M sur la seconde droite rectifiante, a pour longueur MM′ sin lMT, ou

$$ds \sin H.$$

Donc, si L est la longueur Ml, distance du point M de la courbe donnée au point correspondant de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante, on a

$$\frac{ds \sin H}{L} = dH, \qquad L = \frac{ds \sin H}{dH},$$

comme nous l'avons trouvé analytiquement au n° 17.

Si par le point l de l'arête de rebroussement on abaisse les perpendiculaires lT, lT$_1$ sur les tangentes MT, M′T′, et si, par le point l' de la même arête, qui résulte de la rencontre de la droite rectifiante M′l' avec la suivante, on abaisse une perpendiculaire l'T′ sur la seconde tangente, on a

$$l\mathrm{T} = l\mathrm{T}_1 = \mathrm{L} \sin \mathrm{H}, \qquad l'\mathrm{T}' = \mathrm{L} \sin \mathrm{H} + d(\mathrm{L} \sin \mathrm{H}).$$

Donc, si dans le plan du trapèze T$_1$$ll'$T′ on mène lq parallèle à TT′, on aura

$$d(\mathrm{L} \sin \mathrm{H}) = l'q = ll' \sin(\mathrm{H} + d\mathrm{H});$$

d'où, en supprimant dH devant H,

$$ll' = \frac{d(\mathrm{L} \sin \mathrm{H})}{\sin \mathrm{H}},$$

expression de l'élément de l'arête de rebroussement que nous avons trouvée analytiquement au n° 18, et dont on déduit immédiatement le rayon de courbure et le rayon de cambrure de cette arête en la divisant successivement par dH, angle de ses deux tangentes, et par $\frac{ds}{\mathfrak{R}} = \frac{ds}{\rho \sin \mathrm{H}}$, angle de ses deux plans osculateurs en l et l'.

28. *Plus courte distance des rayons de courbure consécutifs menés en* M, M′. — Elle est égale à la ligne de jonction de deux points quelconques pris sur ces deux rayons, par exemple à la ligne MM′ = ds, projetée sur une ligne perpendiculaire à tous deux. Or la droite rectifiante en M est à angle droit sur les directions des deux rayons, et elle fait, avec MM′, l'angle H.

Donc la plus courte distance des deux rayons a pour longueur

$$ds\cos H, \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{\iota\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\iota^2}}},$$

comme nous l'avons trouvé analytiquement au n° **19**.

29. *Points où chaque rayon de courbure passe le plus près du rayon suivant.* — Ce sont les points tels que e (*fig.* 7) où la petite perpendiculaire commune $e\varepsilon$, qui mesure la plus courte distance, vient couper le premier rayon MeO.

Pour en déterminer la position, menons par e une parallèle eP' au second rayon $M'\varepsilon O'$, jusqu'à la rencontre, en P', de la droite rectifiante qui passe par M', et qui peut être regardée comme parallèle à $e\varepsilon$. On a, pour l'angle des directions des deux rayons de courbure, comme on a vu,

$$MeP' = \frac{ds}{\mathfrak{R}} = \frac{ds}{\rho\sin H}.$$

On a aussi la petite perpendiculaire $MP' = ds\sin H$. Le triangle $P'eM$ donne

$$Me\cdot\frac{ds}{\rho\sin H} = ds\sin H,$$

d'où, pour la distance du point e dont nous nous occupons au point M de la courbe,

$$Me = \rho\sin^2 H = \rho\frac{\iota^2}{\rho^2+\iota^2}.$$

On en déduit, pour la distance $\rho - Me$ du même point e, au centre de courbure O,

$$Oe = \rho\cos^2 H = \rho\frac{\rho^2}{\rho^2+\iota^2}.$$

Ces résultats, trouvés analytiquement au n° **19**, font voir *que le point où un rayon passe le plus près du suivant est toujours compris entre la courbe et son centre de courbure, et qu'il partage cette distance, ou le rayon de courbure proprement dit, en deux parties qui sont entre elles comme les carrés de la courbure et de la cambrure.*

On a $M'\varepsilon = P'e = Me$, à cela près d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur. Donc, si e' est, sur le second rayon, le point où il passe le plus près du rayon suivant, on a

$$\varepsilon e' = d.\rho \sin^2 H;$$

d'où, pour la petite ligne de jonction ee' des deux points analogues des deux rayons,

$$ee' = \sqrt{(ds\cos H)^2 + (d.\rho\sin^2 H)^2},$$

expression démontrée analytiquement au n° 19.

On voit que l'élément ee' de la courbe formée par l'ensemble des points tels que e n'est pas généralement à angle droit sur les rayons de courbure ; il fait, avec eux, un angle fini dont la tangente est

$$\frac{ds\cos H}{d(\rho\sin^2 H)}.$$

Il est facile de voir, soit par les formules, soit par des considérations géométriques, que le même élément fait, avec la tangente et avec la binormale à la courbe donnée en M, des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{e\varepsilon}{ee'}\cos H, \quad \frac{e\varepsilon}{ee'}\sin H.$$

Mais les points e jouissent d'une autre propriété. Ils sont des centres de courbure principale de la surface rectifiante. En effet, les deux côtés égaux eM, eP' du triangle MeP' sont respectivement perpendiculaires aux deux plans rectifiants consécutifs, et le plan de ce triangle isocèle est perpendiculaire à la droite rectifiante Ml; donc e est le centre de la courbure, en M, de la section de la surface faite perpendiculairement à sa génératrice rectiligne.

Si l'on joint chaque point e avec le point correspondant l de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante, la suite des droites el, intersections de la suite des plans passant par chaque rayon de courbure et par la droite rectifiante correspondante, formera une surface développable, sur laquelle se

trouveront tous les centres de courbure principale de la surface rectifiante, et qui est à la surface rectifiante ce que celle-ci est à la surface des tangentes.

Si MI est une ligne menée perpendiculairement à la droite *el*, on aura, en vertu d'une propriété de la perpendiculaire, abaissée de l'angle droit de tout triangle rectangle sur l'hypoténuse,

$$\frac{1}{\overline{MI}^2} = \frac{1}{\overline{Me}^2} + \frac{1}{\overline{Ml}^2} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 H} + \frac{1}{L^2}.$$

Donc, en joignant P'I, on a, pour l'angle $MIP' = \frac{ds \sin H}{MI}$, que font ensemble les deux plans tangents consécutifs de cette nouvelle surface, ou pour l'*angle de cambrure de son arête de rebroussement,*

$$\sqrt{\frac{ds^2}{\rho^2 \sin^2 H} + dH^2} = \sqrt{\frac{ds^2}{\rho^2} + \frac{ds^2}{\iota^2} + \left(d.\operatorname{arc\,tang}\frac{\iota}{\rho}\right)^2}.$$

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de cette surface, *développée de développée* de la surface des éléments prolongés de la courbe donnée.

30. *Surface gauche des rayons de courbure. Surface gauche des binormales. Ligne* DE GORGE *ou* DE STRICTION *de ces deux surfaces, et de toute surface réglée.* — Comme les rayons de courbure ne se rencontrent pas deux à deux, ils font ensemble une surface *réglée non développable,* c'est-à-dire une surface gauche.

La ligne courbe, formée par la suite des points *e* (*fig.* 7), où chaque génératrice rectiligne de cette surface gauche passe à la plus petite distance de la génératrice suivante, peut être appelée sa courbe *de gorge* ou *de striction,* car elle y joue le rôle du cercle de gorge d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, ou de la directrice rectiligne d'un conoïde, que M. Vallée appelle sa ligne de striction ou d'étranglement.

Les *binormales* (n° **12**) à la courbe donnée font ensemble une autre surface gauche dont la gorge est cette courbe même, car la plus courte distance de deux de ses génératrices consécutives est l'élément même de la courbe donnée, qui se trouve compris entre elles.

Toute surface réglée a une courbe de gorge, et cette courbe fait, avec les génératrices rectilignes, des angles qui peuvent avoir toutes les grandeurs possibles.

Quand ces angles sont tous nuls, ou quand la gorge est tangente aux génératrices, la surface est développable, et la gorge n'est autre chose que son arête de rebroussement.

Quand ces angles sont tous droits, comme pour la *surface des binormales* dont nous venons de parler, on a un genre de surfaces réglées opposé, en quelque sorte, aux surfaces développables, ou occupant l'autre extrémité de l'échelle. On peut les appeler *surfaces à gorge orthogonale* (*).

31. *Sphère osculatrice.* — Soient $MO = \rho$, $M'O' = \rho + d\rho$ (*fig.* 8), les rayons de courbure aux points M, M′ de la courbe donnée; OC, O′C les *droites polaires,* élevées par les centres de courbure O, O′, perpendiculairement aux deux plans osculateurs correspondants et dans le sens des binor-

---

(*) Toute surface réglée à gorge orthogonale peut, réciproquement, être considérée comme formée par l'ensemble des binormales à une courbe, qui est cette gorge même, car chaque génératrice est perpendiculaire à la fois sur deux éléments contigus. Si la gorge est une ligne droite, les génératrices peuvent être dirigées d'une infinité de manières perpendiculairement à cette ligne, ce qui donne tous les *conoïdes* droits.

Une surface réglée est déterminée, comme on sait, quand on donne trois courbes directrices. Si l'on donne sa gorge, on n'a besoin que d'une autre directrice, pourvu, toutefois, que l'on donne aussi l'une de ses droites génératrices. En effet, si par un point M′ pris sur la courbe de gorge infiniment près de celui M où elle est coupée par la génératrice donnée, on abaisse une perpendiculaire sur cette génératrice, ce sera la plus courte distance de cette droite à la génératrice en M′; donc un plan mené par M′ perpendiculairement à cette petite perpendiculaire coupera la seconde directrice donnée en un point qui, joint à M′, donnera une deuxième génératrice, et l'on obtiendra ainsi successivement toutes les génératrices composant la surface.

Ne prévoyant pas que je puisse continuer des recherches sur ce sujet, qui me paraît intéressant, je crois devoir proposer ces questions, entre beaucoup d'autres, aux géomètres qui s'occupent de la théorie des surfaces réglées: 1° Sur la surface gauche formée par l'ensemble des rayons de courbure d'une courbe donnée, peut-on tracer une seconde courbe dont les génératrices de la surface soient aussi les rayons de courbure? 2° Toute surface réglée peut-elle, pourvu qu'elle ne soit pas développable, être considérée comme formée par l'ensemble des rayons de courbure d'une certaine courbe? Où est cette courbe? Et, s'il n'y a que certaines surfaces gauches qui jouissent de cette propriété, quels sont leurs autres caractères distinctifs? 3° Quelles sont les surfaces réglées dont la gorge fait un angle constant avec les génératrices; quelles sont celles dont la gorge est une ligne droite oblique aux génératrices? etc.

males (n° 12). Ces deux droites se rencontrent en C, centre de la sphère osculatrice, et l'on a leur angle $OCO' = \frac{ds}{\nu}$, puisqu'elles sont perpendiculaires aux plans osculateurs menés en M, M'.

La partie QO' du second rayon de courbure, comprise entre les deux droites polaires, a pour longueur $d\rho$, puisque ces droites sont, ou perpendiculaires ou infiniment peu obliques aux deux rayons.

Donc on a, pour la distance finie QC ou OC du centre de courbure au centre de la sphère,

$$OC = \frac{d\rho}{\frac{ds}{\nu}} = \frac{\nu d\rho}{ds};$$

et le rayon de la sphère, MC, hypoténuse du triangle rectangle construit sur le rayon de courbure MO et sur cette droite polaire OC, a pour longueur

$$R = \sqrt{\rho^2 + \frac{\nu d\rho^2}{ds}},$$

comme on l'a trouvé par l'analyse, au n° 20, ainsi que l'expression

$$\text{tang CMO} = \frac{\nu d\rho}{\rho ds}$$

de l'angle qu'il fait avec le rayon de courbure.

La projection du rayon MC de la sphère osculatrice, sur la droite rectifiante, est égale à la somme des projections de MO, OC sur cette même droite; mais la projection de MO est nulle, puisque la droite rectifiante est perpendiculaire au rayon de courbure; donc, comme l'angle que fait avec la droite rectifiante la ligne OC, parallèle à la binormale, est $\frac{\pi}{2} - H$, on a, pour le cosinus de l'angle du rayon de la sphère avec la droite rectifiante,

$$\cos \text{MCO} \sin H = \sin H \frac{\nu d\rho}{R ds},$$

comme nous l'avons trouvé aussi au n° 20.

32. *Lieu des centres des sphères osculatrices.* — Il est facile d'avoir la

longueur de son élément CC′ (*fig.* 8), distance des centres C, C′ des sphères osculatrices en M, M′. En effet, comme CO′ = CQ, à cela près d'un infiniment petit du second ordre, on a l'élément

$$CC' = C'O' - CQ = OQ + (C'O' - CO) = OQ + d\frac{\nu d\rho}{ds}.$$

Il reste donc à déterminer la longueur de la petite portion OQ de la droite polaire, interceptée entre les deux rayons de courbure consécutifs.

Pour cela, soient $e\varepsilon$ la plus courte distance de ces deux rayons, et MP = $e\varepsilon$ la portion de la droite rectifiante Ml, interceptée par une perpendiculaire M′P, menée de M′ sur cette droite. Projetons le petit triangle MM′P en O$m'p$ sur un plan parallèle au sien, mené par le point O, et qui contiendra nécessairement la droite polaire OC, puisqu'il sera perpendiculaire au rayon de courbure MO. La ligne projetante Pp passe par l'extrémité ε de la plus courte distance : donc le plan qui passe par M′P et par sa projection $m'p$, passe aussi par le second rayon de courbure M′O′; et $m'p$ prolongé doit passer par le point Q, où ce second rayon perce le plan sur lequel nous avons fait la projection.

L'angle QOm' est droit, puisque la droite polaire est perpeudiculaire à la direction de l'élément MM′ de la courbe donnée, et l'on a l'angle m'Oo=H. Donc

$$Op = ds \cos H = OQ \sin H;$$

d'où, pour la longueur cherchée,

$$OQ = ds\frac{\cos H}{\sin H} = \frac{\rho}{\nu}ds.$$

Et l'on a, pour l'élément de la courbe des centres des sphères, ou de l'arête de rebroussement de la surface polaire,

$$CC' = \frac{\rho}{\nu}ds + d\cdot\frac{\nu d\rho}{ds} = ds\cdot\frac{R dR}{\nu d\rho},$$

comme nous l'avons trouvé analytiquement au n° **21**.

33. *Lieu des centres de courbure.* — L'élément OO′ (*fig.* 8) de cette courbe, ou la distance de deux centres de courbure consécutifs, est, d'après ce que nous venons de voir, l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les

deux côtés sont

$$QO' = d\rho, \quad QO = \frac{\rho}{\nu}\, ds.$$

Donc on a

$$OO' = \sqrt{\frac{\rho^2}{\nu^2}\, ds^2 + d\rho^2} = \frac{ds}{\nu} R.$$

Cet élément, ou la tangente à la courbe des centres de courbure fait, avec la droite polaire en O, un angle O'OC, dont le cosinus est

$$\frac{OQ}{OO'} = \frac{\rho}{R},$$

et qui est, par conséquent, égal à l'angle CMO, fait par le rayon de la sphère osculatrice avec le rayon de courbure.

Si l'on prolonge cette tangente ainsi que le rayon de la sphère osculatrice, jusqu'à leur rencontre en U, on obtient la grandeur de l'angle MUO qu'ils font ensemble, en remarquant que, comme l'angle MOC est droit, et comme l'angle COU = CMO, on a

$$MUO = \pi - COU - UCO = \pi - CMO - \left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - CMO\right)\right],$$

ou

$$MUO = \frac{\pi}{2} - 2CMO = \frac{\pi}{2} - 2 \arccos \frac{\rho}{R}.$$

Enfin, comme la projection de l'élément OO', qui joint deux points appartenant à deux rayons de courbure, sur leur perpendiculaire commune, doit avoir pour longueur la plus courte distance de ces rayons, on a, pour l'angle O'O*p* que fait la tangente à la courbe des centres de courbure avec la rectifiante,

$$\cos O'Op = \frac{ds \cos H}{OO'} = \frac{\nu \cos H}{R} = \frac{\mathfrak{A}}{R}.$$

Ces expressions avaient été données au n° **22**. On démontre simplement par des considérations géométriques, comme l'on voit, tous les résultats auxquels l'analyse avait conduit.

On peut démontrer géométriquement même toutes les formules de transformation de la Note II; on en verra plusieurs exemples à la fin de cette Note.

NOTE I (*).

Sur quelques particularités de Géométrie et de Mécanique, relatives aux deux affections principales des lignes courbes non planes, et sur les dénominations à imposer à ces affections.

I. On sait que divers auteurs appellent angles de *première courbure* et de *seconde courbure* d'une courbe non plane, le petit angle $\frac{ds}{\rho}$ de deux tangentes, et le petit angle $\frac{ds}{\tau}$ de deux plans osculateurs, en deux points infiniment voisins pris sur cette courbe; *première* et *seconde courbure*, les fractions $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$, c'est-à-dire les mêmes angles rapportés à l'unité de distance des deux points; *rayons* de première et de seconde courbure, les lignes ρ et τ.

Mais d'autres auteurs, en aussi grand nombre que ceux-ci, appellent les quantités $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$ *flexions*, surtout quand il s'agit de la seconde; ou bien, celle-ci *torsion*, et *courbure* la première seulement.

Examinons ces dénominations au point de vue de leur emploi dans les recherches de Géométrie et de Mécanique, et voyons s'il ne conviendrait pas d'en adopter d'autres.

II. Et, d'abord, convient-il de désigner par une lettre le dénominateur de la seconde affection, comme celui ρ de la première (qui représente le rayon du cercle osculateur), ou ne pourrait-on pas, plutôt, prendre une lettre pour désigner, ou quelque ligne remarquable, telle que le *rayon de la sphère osculatrice* (*voyez* n^os^ 12, 20 ou 31), ou quelque angle comme celui de la tangente avec la *rectifiante* (n^os^ 12, 14 et 15 ou 24), et exprimer la deuxième affection en fonction de celle de ces deux quantités qu'on aurait ainsi choisie, au lieu de l'appeler $\frac{1}{\tau}$?

A cette question, qui m'a été faite, je réponds que l'un ou l'autre est sans doute possible. Soit R le rayon de la sphère osculatrice; $\frac{1}{\tau}$ peut être remplacé (n° 20 ou 31) par $\frac{d\rho}{ds\sqrt{R^2-\rho^2}}$. Soit H l'angle dont nous parlons, $\frac{1}{\tau}$ peut être remplacé (n° 15 ou 24) par $\frac{1}{\rho \tang H}$.

Mais on a rarement à considérer, dans les applications, la sphère osculatrice; on a, au contraire, à faire entrer fréquemment, dans les calculs, la deuxième affection ou l'angle de deux plans osculateurs consécutifs, ainsi que je l'ai éprouvé très-souvent en faisant des recherches sur l'état d'équilibre et sur la résistance des verges courbes fléchies et tordues : ce serait donc sacrifier la simplicité que de désigner la deuxième affection par une expression telle que $\frac{d\rho}{ds\sqrt{R^2-\rho^2}}$.

(*) *Voir* Introduction et n° 12.

Quant à l'angle H de Lancret, il joue sans doute un rôle très-important : c'est l'angle que fait, avec les arêtes de son cylindre, cette *hélice osculatrice* (n° 16) qui a les mêmes affections principales que la courbe en un point donné : c'est encore le demi-angle au centre d'un cône droit (n° 25) osculateur à la surface des éléments prolongés de la courbe donnée, et caractérisant, par conséquent, assez bien l'affection de cette courbe, qui résulte de ce que ses éléments successifs ne sont pas dans un même plan. On voit, à la seconde partie du Mémoire, que l'introduction de cet angle, comme abréviation de $\operatorname{arc\,tang}\frac{\upsilon}{\rho}$, rend plus simples un grand nombre de formules.

Néanmoins on a toujours à considérer cet angle bien plus rarement, dans les applications, que cette deuxième affection $\frac{1}{\upsilon}$ qui est tout à fait analogue à la courbure $\frac{1}{\rho}$: de plus, l'emploi habituel de $\frac{1}{\rho\,\operatorname{tang} H}$, pour la désigner, aurait, comme celui de $\frac{d\rho}{ds\sqrt{R^2-\rho^2}}$, l'inconvénient de masquer, en quelque sorte, une vérité démontrée par Lancret, et dont on ne saurait trop se pénétrer, savoir l'*indépendance complète* des deux affections en question, dans toute courbe non plane.

Je pense donc qu'il faut conserver à la deuxième affection une désignation comme celle $\frac{1}{\upsilon}$ que nous lui avons donnée.

III. Mais que représente la grandeur linéaire υ? peut-on l'appeler *rayon* comme la ligne ρ?

Il serait sans doute inutile de chercher à placer, le *long de la courbe donnée*, un cercle du rayon υ : ce cercle ne pourrait jamais lui être que simplement tangent, et le seul cercle du rayon ρ peut avoir un contact plus intime avec elle. Le cercle du rayon υ ne peut être, non plus, osculateur aux projections de la courbe, soit sur le plan normal, soit sur le plan tangent perpendiculaire au plan osculateur : il n'est pas, non plus, osculateur à sa *développée par le plan*, comme on l'a vu au n° 21.

Mais des cercles ayant pour rayon la ligne υ peuvent toujours être décrits utilement pour l'étude des propriétés de la courbe donnée. Nous venons de parler d'un cône droit osculateur (n° 25), et à la courbe, et à cette surface qui a, avec elle, le rapport le plus intime, puisqu'elle résulte du prolongement indéfini de tous ses éléments : ce cône est en quelque sorte, pour la deuxième affection de la courbe, ce que le cercle osculateur est pour la première, car cette deuxième affection est comme empruntée à la surface en question. Or, un cône est caractérisé par la grandeur du rayon de sa base, prise à une distance déterminée de son sommet : si l'on prend, pour cette distance, la longueur connue ρ, qui est la seule unité de comparaison fournie par une première étude de la courbe donnée, on a, pour la base du cône droit osculateur, *précisément un cercle d'un rayon* υ.

Un pareil cercle peut être placé autrement, contre la surface développable dont nous parlons, de manière à caractériser directement son degré de courbure sans recourir au cône droit ci-dessus. En effet, les deux *lignes de courbure* de cette surface en un point quelconque sont, l'une sa génératrice rectiligne dont la courbure est nulle, l'autre sa section perpendiculaire à cette génératrice : le rayon de courbure de celle-ci varie proportion-

ment angulaire qu'elles ont fait l'une devant l'autre, rapporté à l'unité de leur distance ; en sorte que si ds est cette distance, et si l'on appelle $\frac{ds}{\mathfrak{G}}$ *le petit angle dont les points de la seconde ont tourné devant les points de la première,* $\frac{1}{\mathfrak{G}}$ est la grandeur de la *torsion.*

Cette grandeur serait bien égale au changement subi par l'affection $\frac{1}{\rho}$ de l'axe, si, dans le mouvement du fil, chaque section emportait avec elle le plan osculateur correspondant.

Mais les choses ne se passent point ainsi. Les plans osculateurs ne sont pas invariablement liés aux sections : ils changent généralement de position par rapport aux droites matérielles tracées sur elles ; d'où il suit que la torsion $\frac{1}{\mathfrak{G}}$ dépend, non-seulement du mouvement des plans osculateurs les uns par rapport aux autres, mais aussi d'un autre élément sur l'existence duquel j'ai déjà eu l'occasion d'attirer l'attention, et qui est le déplacement angulaire [redacted] de ces plans sur les sections transversales correspondantes (*).

On pourrait citer beaucoup d'exemples de cette différence, entre la grandeur de la torsion $\frac{1}{\mathfrak{G}}$, et le changement de grandeur subi par $\frac{1}{\rho}$; on en verra un au n° VIII ci-après (en note). On peut aussi considérer la verge courbe du numéro précédent, dont les sections circulaires sont supposées tourner sur elles-mêmes, sans que son axe change ni de forme ni même de position (ce qui est très-réalisable au moyen de points fixes suffisamment nombreux, qui empêchent la verge de s'écarter à droite et à gauche, sans s'opposer à la rotation). Il est évident que si l'on fait plus tourner une des deux extrémités que l'autre, il y aura *torsion,* et, cependant l'affection $\frac{1}{\rho}$ n'aura changé nulle part. On peut encore prendre pour exemple un arc élastique horizontal invariablement encastré par un bout, et sollicité à l'autre par une force verticale. Le plan de cet arc se cambrera, ou, ce qui revient au même, l'arc cessera d'être une courbe plane, et ses plans osculateurs deviendront, partout, inclinés sur l'horizon : cependant les points matériels de la section encastrée n'auront pas changé de place ; il faudra donc que la trace du plan osculateur ait tourné sur cette section, etc.

Le mot de *torsion,* bien qu'habilement choisi pour exprimer la deuxième affection $\frac{1}{\rho}$ des courbes non planes, doit donc être absolument exclu comme celui de flexion.

VI. J'avais pensé $\left(\text{toujours pour désigner la deuxième affection } \frac{1}{\rho}\right)$ au mot d'*inflexion,* ou à celui d'*infléchissement,* en considération de ce que la projection d'une courbe non plane sur le plan tangent perpendiculaire à son plan osculateur en un point donné M, offre toujours une inflexion en M, et que cette inflexion disparaît quand la courbe devient plane, ou quand $\frac{1}{\rho}$ s'anéantit.

(*) *Comptes rendus,* 30 octobre et 6 novembre 1843, t. XVII, p. 953 et 1027, et 1er juillet 1844, t. XIX, p. 41 et 47. Ce déplacement y est désigné par ε, ainsi qu'à la note du n° VIII ci-après.

Mais l'inflexion disparaît aussi quand la courbure ou première affection $\frac{1}{\rho}$ devient nulle, et, cependant, comme nous verrons au n° VIII, la deuxième affection $\frac{1}{\tau}$ ne s'annule pas toujours en même temps que la première. De plus, $\frac{1}{\tau}$ n'offre aucunement la mesure du degré de l'inflexion plus ou moins prononcée, ou de la courbure naissante et plus ou moins rapide des deux parties de la courbe, de part et d'autre du point d'inflexion où la courbure absolue est nulle. Cette mesure est le produit de $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{1}{\tau}$, en sorte que l'une de ces deux quantités y influe autant que l'autre; l'*inflexion* pourrait être extrêmement peu prononcée quoique $\frac{1}{\tau}$ fût considérable, et réciproquement (*).

Les deux noms, dont je viens de parler en dernier lieu, ne conviennent donç pas non plus.

VII. Discutons actuellement la dénomination de *seconde courbure*, appliquée à $\frac{1}{\tau}$, en appelant $\frac{1}{\rho}$ première courbure.

Elle n'a pas les inconvénients que nous avons trouvés à plusieurs autres. *Courbure* se dit des surfaces comme des lignes, et peut désigner la déviation du plan comme la déviation de la ligne droite. La dénomination *seconde courbure* est analogique, et l'on peut regarder, j'en conviens, la première et la seconde courbure comme composant ensemble cette *double courbure* par laquelle on désigne ordinairement les lignes non planes.

Cependant, tant qu'il n'en aura pas été adopté d'autre pour désigner l'affection $\frac{1}{\tau}$, il y a tout lieu de penser (et le passé y porte) que bon nombre de géomètres ne s'en contenteront

---

(*) En effet, prenons la tangente au point M pour axe des x, et le plan osculateur pour plan des zx, en sorte que le plan sur lequel nous considérons la projection de la courbe soit celui des xy. On aura $dy = 0$, $ds = 0$, $ds = dx$, et (n° 4), $Z = 0$; d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ce qui montre bien que, sur cette projection, M est un point d'inflexion (à moins que, par exception, il ne soit un point de rebroussement). On a aussi $X = 0$ et (n^os 4, 7)

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{Y}{ds^2} = \mp\frac{d^2z}{dx^2}, \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\rho^2}{dx^6}\cdot\frac{ds^6}{\rho}\,d^3y = \rho\frac{d^3y}{dx^3};$$

d'où

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \pm\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\tau}.$$

Le degré de l'inflexion ou la rapidité du décroissement et de l'accroissement de la courbure, avant et après le point où celle-ci est nulle, peut être regardé comme mesuré par $\frac{d^3y}{dx^3}$; il est donc égal, non à la deuxième affection, mais au produit de toutes deux.

pas et y substitueront souvent quelque autre dénomination, ne fût-ce que pour le besoin d'une exposition ou d'une démonstration. En effet, un numéro d'ordre ne fournit jamais qu'une désignation peu satisfaisante, et la dénomination *seconde courbure* ne particularise nullement ce qu'elle est destinée à exprimer : l'épithète qui l'allonge, et dont la corrélative aura besoin d'être ajoutée sans cesse à la désignation de l'autre *courbure*, exigera plus d'une fois qu'on l'explique; car, *premier* et *deuxième* se disent le plus souvent de deux choses semblables dont on est dans le cas de parler successivement, et non de deux choses différentes, etc.

Mais l'expression de *seconde courbure* peut aussi donner lieu à des méprises, tant que l'on ne s'est pas complétement et invariablement imprimé dans l'esprit ce qui distingue cette affection de la première. On peut se figurer que ces deux *courbures* sont peut-être quelque chose de plus ou moins analogue aux deux courbures principales d'une surface, c'est-à-dire une courbure *maximum* et une courbure *minimum* parmi celles des projections de la courbe sur ses divers plans tangents. Ce qui prête encore à cette erreur (grossière j'en conviens), c'est que, dans l'idée la plus naturelle à tout le monde, comme dans l'intention de Clairaut (*) et de Pitot, la dénomination *courbe à double courbure* n'est nullement relative aux affections $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$ dont une pareille courbe est douée : elle exprime, simplement, qu'une ligne non plane, projetée sur deux plans orthogonaux, donne toujours deux courbes, ou, ce qui revient au même, qu'une pareille ligne paraît toujours courbée, à quelque point de vue qu'on se place pour l'envisager, tandis qu'une ligne plane, vue d'un point de son propre plan, paraît droite.

On peut donc se demander, quand on n'est pas encore bien pénétré de ce qui a rapport à la *seconde courbure* d'une ligne non plane, si ce ne serait point la courbure de la projection sur le plan tangent perpendiculaire au plan osculateur. J'avoue n'avoir été tout à fait désabusé, à ce sujet, que lorsque j'ai reconnu que la courbure de cette projection est *zéro* au point de tangence (numéro précédent), et que la *première courbure*, ou la courbure de la projection sur le plan osculateur, est, non pas une courbure maximum, mais bien la courbure *totale* en quelque sorte, ou la courbure *résultante* de celles des projections sur deux plans tangents orthogonaux quelconques (**).

(*) « J'ai cru devoir appeler ces sortes de courbes *courbes à double courbure*, parce qu'elles participent de la courbure des deux courbes planes qui en sont les projections. » CLAIRAUT.

(**) En effet, si l'on prend la tangente au point M pour axe des x, et si l'on appelle ρ', ρ'' les rayons de courbure des projections de la courbe sur les plans zx et xy, 6 et γ les angles que font les mêmes plans avec le plan osculateur, on a $\frac{ds^3}{\rho'} = Y$, $\frac{ds^3}{\rho''} = Z$, $\cos 6 = \frac{\rho Y}{ds^3}$, $\cos\gamma = \frac{\rho Z}{ds^3}$; d'où

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho}\cos 6, \qquad \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{\rho}\cos\gamma, \qquad \frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

On voit que les courbures des projections sur les plans tangents orthogonaux se composent comme des forces, théorème qui est un cas particulier de celui qui est démontré à la Note de M. Binet (*Comptes rendus*, t. XIX, p. 215), et qui peut se déduire aussi du théorème de Meusnier.

Alors, pourquoi appeler également *courbure*, en un point donné, une affection qui ne donne aucune courbure aux diverses projections ou perspectives de la ligne donnée en ce même point?

Je pense donc que la dénomination *seconde courbure* est impropre.

C'était, dès 1819, l'opinion de M. Vallée. « Toutes les courbes possibles, dit ce géomètre (*), n'ont véritablement qu'une seule courbure en chacun de leurs points, et, sous ce rapport, les courbes planes ne diffèrent des courbes à double courbure qu'en ce que les premières ont toutes leurs courbures dans un même plan, et que le plan des courbures des dernières varie continuellement. »

Cette opinion, adoptée par M. Leroy, dans sa *Géométrie descriptive* (1842, n° 654), est aussi celle de M. Olivier (**), et probablement de tous ceux qui ont désigné $\frac{1}{\tau}$ par des mots particuliers. M. Vallée propose de réformer, même, la dénomination de *courbe à double courbure*, car elle est, dit-il, « non-seulement longue, désagréable et embarrassante, mais » elle donne encore l'idée fausse et spécieuse *de deux courbures qui n'existent pas*. »

VIII. Voici d'ailleurs une circonstance singulière où m'a conduit un problème de mécanique, mais qui est capable de se présenter aussi en géométrie : c'est celle d'une ligne *droite*, ou devenant telle dans un cas particulier, et pour laquelle, cependant, la prétendue *seconde courbure* a une valeur finie et déterminée.

Supposons qu'un problème conduise à une hélice circulaire ayant une longueur de spire $2\pi a$ constante, ou indépendante de l'angle φ que ses éléments font avec le plan de sa base, angle dont la grandeur est supposée varier par hypothèse, suivant les cas particuliers.

Le rayon de la base, ou du cylindre droit que l'hélice enveloppe, sera $a\cos\varphi$, et l'on aura, pour les deux courbures,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos\varphi}{a}, \qquad \frac{1}{\tau}=\frac{\sin\varphi}{a}.$$

Considérons ce que ces expressions deviennent pour les hypothèses extrêmes que l'on peut faire sur φ.

Quand $\varphi = 0$, le rayon de la base devient a, le rayon de courbure ρ est $= a$ aussi; la ligne τ est infinie, et l'affection $\frac{1}{\tau}$ est nulle. Et, en effet alors, l'hélice se réduit à une courbe plane, savoir au cercle dont a est le rayon.

Mais supposons l'angle φ droit, ou $a\cos\varphi=0$. Le cercle de base est un point, et l'*hélice est une ligne droite*. On a $\rho = \infty$, et la première courbure $\frac{1}{\rho}$ est nulle, comme cela doit être; mais la *deuxième courbure*, loin de s'anéantir, *arrive à son maximum*, et l'on a

$$\tau = \text{la quantité finie } a \text{ (***)}.$$

(*) *Traité de Géométrie descriptive*, chap. III, n° 670, p. 269.

(**) XXIV^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 65.

(***) L'hélice dont nous venons de parler, ayant une spire $2\pi a$ et une inclinaison φ sur le plan de sa base, est,

Un pareil résultat ne doit pas surpendre; car, outre que l'on a, pour toute ligne droite, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, ce qui donne [n° 7, formule (11)]

$$\frac{1}{\tau} = \frac{0}{0},$$

il est bien évident, à priori, que tout plan passant par une ligne droite est osculateur à cette ligne; d'où il suit que les angles formés par les plans osculateurs menés aux points successifs d'une droite ont des grandeurs absolument quelconques. Ce qui caractérise une ligne droite, c'est *une première courbure nulle* et *une deuxième courbure arbitraire.*

Si l'indétermination et l'arbitraire annoncés par le résultat $\frac{0}{0}$ cessent dans quelques exemples, c'est parce que la droite se présente comme limite, ou cas extrême, d'une suite de courbes. Ainsi, pour la droite qui servirait de limite à des courbes planes, $\frac{1}{\tau}$ serait nul; pour celle qui est la limite d'hélices ayant une spire constante et un diamètre décroissant, $\frac{1}{\tau}$ devait

---

comme M. Wantzel l'a reconnu le premier, la courbe qu'affecte une verge primitivement droite, à section régulière et constante, invariablement encastrée par un bout et sollicitée à l'autre par des forces faisant un couple (*Comptes rendus*, 15 juillet 1844, t. XIX, p. 184). La base de l'hélice est parallèle au plan du couple, φ est l'angle primitif de la verge avec ce plan, a représente $\frac{E\mu}{h}$, h étant le moment du couple, E étant un coefficient dépendant de *l'élasticité de dilatation ou de flexion de la matière*, et μ le moment d'inertie de la section transversale autour d'une droite quelconque menée dans son plan par son centre de gravité.

La *flexion*, telle que nous l'avons entendue à la fin du n° IV ci-dessus, est bien égale à la première affection $\frac{1}{\rho} = \frac{h\cos\varphi}{E\mu}$ dans cet exemple particulier.

Mais la *torsion* n'est point égale à la deuxième affection $\frac{1}{\tau} = \frac{h\sin\varphi}{E\mu}$; elle dépend d'un autre coefficient G, dit *d'élasticité de glissement ou de torsion*, dont le rapport avec E varie suivant que la matière de la verge est plus ou moins fibreuse. Cette torsion a pour valeur dans le même exemple (même Note du *Compte rendu*)

$$\frac{h\sin\varphi}{2G\mu} = \frac{E}{2G}\frac{1}{\tau},$$

quantité qui devient égale à $\frac{5}{4}\frac{1}{\tau}$ quand la verge n'est point fibreuse, ou quand son élasticité est la même en tous sens.

Dans le cas général, la torsion n'est pas même proportionnelle à $\frac{1}{\tau}$; c'est la quantité désignée par $\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0}$, τ_0 étant la valeur primitive de τ, et ε étant le déplacement angulaire de la trace du plan osculateur sur la section.

Et la *flexion* (même Note) est représentée, en général, par

$$\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 2\frac{\cos\varepsilon}{\rho\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^2}},$$

ρ_0 étant la valeur primitive de ρ. Elle n'est égale à la variation $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$ de la première affection de la courbe d'axe que lorsque l'angle désigné par ε est nul.

avoir nécessairement une valeur finie, car il faut que le plan osculateur fasse toujours une révolution à chaque spire; d'où il suit que $\frac{1}{\rho}$ doit être égal à 2π divisé par la longueur de la spire, qui se confond alors avec une portion déterminée de l'axe de l'hélice, et c'est aussi ce que nous avons trouvé.

Mais cela confirme que la dénomination de *deuxième courbure,* donnée à $\frac{1}{\rho}$, est impropre. La ligne courbe, d'après la définition élémentaire, est celle qui n'est *ni droite ni composée de lignes droites;* et, réciproquement, *ligne droite* est celle qui n'est pas courbe ou qui n'a aucune *courbure.* Il convient donc, comme l'on voit, de donner un autre nom à l'affection $\frac{1}{\rho}$.

On m'a dit, il est vrai, que le même reproche atteindrait tout autre nom emprunté à des propriétés que le langage ordinaire n'attribue pas à la ligne droite; ainsi, en prenant pour exemple les deux dénominations qui nous restent à examiner ci-après, on m'a demandé Qu'est-ce que serait une ligne droite *gauche* ou *cambrée* (*)? Je réponds qu'il suffit évidemment que la dénomination choisie soit scientifiquement nouvelle pour que toute contradiction avec les éléments de géométrie disparaisse, et pour que l'inconvénient que peut présenter une certaine alliance de mots soit tout à fait nulle dans les cas rares où elle s'offrira.

Cherchons donc une dénomination pour $\frac{1}{\rho}$, à l'exclusion de celles de *seconde courbure,* de *torsion,* de *flexion* et d'*inflexion,* ci-dessus examinées.

IX. J'ai pensé un instant à adopter *gauchissement,* à cause de l'expression de *courbe gauche* proposée par M. Vallée pour remplacer celle de courbe à *double courbure.*

Mais gauchissement est, comme flexion, torsion, un terme de mécanique plutôt que de géométrie; il indique, ainsi que ces derniers, un changement survenu plutôt qu'une affection, soit actuelle, soit antérieure, et il me paraît utile de le réserver pour désigner (comme j'ai eu occasion de le faire) le degré de l'altération de surfaces primitivement planes, devenues *gauches.*

D'ailleurs, l'affection $\frac{1}{\rho}$ appartient principalement, comme nous avons vu, *à une certaine surface développable et non à une surface gauche;* $\frac{1}{\rho}$ ne doit donc pas être regardé comme mesurant la quantité dont une surface, liée à la courbe donnée, est plus ou moins gauche, et le terme de gauchissement ne lui convient sous aucun rapport.

(*) M. Transon, de qui est cette objection, ne voit, au demeurant, aucune difficulté à l'emploi de la dénomination nouvelle que je propose ci-après (Journal *l'Institut,* séance de la Société philomatique du 3 août 1844); seulement, suivant lui, celle de *seconde courbure* suffirait, parce que *courbure* s'applique à l'inclinaison mutuelle des éléments plans d'une surface comme à l'inclinaison mutuelle des éléments linéaires d'une ligne. Je répète que c'est en partie pour éviter qu'on regarde les deux affections principales d'une ligne comme analogues à ce qu'on appelle *les deux courbures* d'une surface, que je désire, comme M. Vallée et d'autres auteurs, un nom différent pour désigner la seconde.

X. Mais il existe un autre mot auquel on ne peut reprocher qu'un peu de dureté dans notre langue, et qui paraît, du reste, tout à fait propre à remplir l'objet que nous nous proposons.

C'est le mot de *cambrure*.

Cambré s'emploie comme courbé, et l'on dit quelquefois qu'une pièce de bois se cambre, etc.; mais, en général, ce mot s'applique plus aux surfaces qu'aux lignes, d'où il suit que si l'on appelle *cambrure* une affection d'une ligne courbe, il sera clair que cette affection n'est point la courbure de cette ligne ou la quantité dont elle dévie de la ligne droite, mais qu'elle est plutôt la quantité dont quelque surface, composée avec ses éléments, dévie de la surface plane, ou [illegible] est le degré de courbure de cette surface liée à la courbe donnée; or, c'est bien là l'affection $\frac{1}{\tau}$, à laquelle nous cherchons un nom (n° III).

Bien plus, *cambrure*, d'après son étymologie, paraît particulièrement propre à désigner précisément la courbure d'une *surface développable*, ou engendrée par un plan. Le mot latin *camera* et surtout le mot grec dont il dérive signifient proprement voûte, arcade, chariot couvert (*); d'où il suit que *cambrer* veut dire transformer un plan en surface courbe, et c'est, en effet, son sens technologique en français.

XI. Je propose donc d'appeler exclusivement *courbure*, dans une ligne courbe, l'affection $\frac{1}{\rho}$, nommée par quelques auteurs première courbure ou première flexion, et d'appeler *cambrure* l'affection $\frac{1}{\tau}$, connue jusqu'à présent sous les noms de flexion, seconde flexion, seconde courbure, torsion.

On voit que les deux dénominations ont une symétrie et une consonnance qui compenseront, pour l'oreille, la rudesse reprochée à la seconde; ρ sera le rayon de courbure, τ le rayon de cambrure; $\frac{ds}{\rho}$, angle de deux tangentes, sera l'angle de courbure; $\frac{ds}{\tau}$, angle de deux plans osculateurs, sera l'angle de cambrure, etc.

On pourra appeler aussi cambrure d'une surface développable seulement, la plus grande courbure parmi celles de ses sections normales en un point donné, ou la courbure de la section perpendiculaire à sa génératrice rectiligne en ce même point.

On peut demander si l'on conservera, avec ces dénominations, celle de courbe à double courbure, ou si l'on dira plutôt *courbe à cambrure, courbe cambrée*. Je réponds que ce changement est moins utile que l'adoption d'un nom nouveau pour l'affection $\frac{1}{\tau}$; qu'il paraît, du reste, assez convenable. L'expression courbe cambrée ou à cambrure n'est pas plus choquante, je crois, que celle de courbe à double courbure, embarrassante et contenant une répétition qui répugne aux habitudes de notre langue; mais rien n'obligera à s'en

---

(*) Dictionnaires de M. Planche et de M. Alexandre, au mot Καμαρα.

On lit, au Dictionnaire étymologique de M. de Roquefort, que *camera* (d'où *cameratio*, cambrure) ne signifiait pas d'abord une chambre en général; il ne s'appliquait, dans l'origine, qu'aux pièces voûtées.

servir toutes les fois que l'on aura à parler de pareilles courbes, car il suffira, en général, de les appeler des lignes non planes.

XII. Résumons la discussion terminologique qui occupe la plus grande partie de cette Note.

Nous avons vu que les deux affections principales des lignes courbes consistant, l'une dans la quantité dont leurs éléments consécutifs s'écartent de la ligne droite, l'autre dans la quantité dont la succession de ces éléments s'écarte du plan, ont été appelées de différents noms par différents auteurs, sans qu'aucun de ces noms ait encore prévalu (n° I);

Que le nom de rayon peut très-bien être donné à l'une comme à l'autre des deux longueurs ρ, τ, qui servent de dénominateurs aux mesures $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$ de ces deux affections, car on peut décrire utilement un cercle du rayon τ, si ce n'est le long de la courbe, au moins le long de la surface formée par l'ensemble de ses éléments prolongés, pour caractériser le degré de courbure de cette surface, qui est cause que la deuxième affection de la courbe n'est pas nulle (n° III);

Que les noms de flexion, de torsion appartiennent à la Mécanique; qu'ils y désignent à peu près forcément, dans la théorie des verges élastiques courbes, d'autres quantités que les affections $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$, et même que leurs changements de grandeur, en sorte qu'ils ne sauraient être employés en géométrie, pour désigner $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$, sans amener la confusion et perpétuer des erreurs plus d'une fois commises (n^os IV, V);

Que le degré de l'*inflexion* plus ou moins prononcée qu'offre la projection d'une courbe sur un plan perpendiculaire au plan de sa courbure, n'est pas proportionnel à $\frac{1}{\tau}$ seul, en sorte que le mot d'inflexion ne saurait non plus être employé pour cette quantité (n° VI);

Que la dénomination *seconde courbure,* quoique pouvant être meilleure, est repoussée par plusieurs géomètres pour des raisons bonnes aussi; qu'elle n'était pas dans la pensée des auteurs de l'expression *courbe à double courbure;* qu'elle ne pourrait être regardée comme définitive, rien qu'à cause de sa forme; qu'elle est sujette à tromper et à faire faire des recherches en pure perte; que l'affection $\frac{1}{\tau}$ n'entre pour rien dans la courbure, en un point donné, des diverses perspectives ou projections de la courbe; que la dénomination de *seconde courbure* entraînerait une contradiction avec les définitions de la géométrie élémentaire, car il faudrait, dans plusieurs cas, attribuer une *courbure* à une ligne droite : ce dernier inconvénient disparaîtrait, comme les autres, en usant d'un mot nouveau en géométrie, en supposant même que sa signification vulgaire fût analogue à celle de courbure (n^os VII, VIII);

Que le mot *gauchissement* ne saurait convenir non plus (n° IX);

Enfin, que le mot *cambrure,* appliqué à l'affection $\frac{1}{\tau}$, paraît réunir les conditions désirables; il désigne surtout, dans son acception usuelle et dans son acception étymologique,

la courbure d'une surface formée en fléchissant un plan, en sorte qu'il s'applique bien aux courbures principales des surfaces développables, et, par conséquent, à cette affection des courbes non planes qui leur vient proprement de la surface formée par l'ensemble de leurs éléments prolongés. Il est expressif, sans équivoque ni contradiction; sa symétrie avec courbure et sa précision compensent, dans le discours, la rudesse de prononciation qu'on peut lui reprocher (n° X).

Je propose donc aux géomètres d'employer ce mot CAMBRURE pour désigner l'affection des courbes non planes qui tient, en un point quelconque, à ce que la suite de leurs éléments forme différents plans plus ou moins inclinés les uns sur les autres, et d'appeler *rayon de cambrure* la longueur ν, qui entre comme dénominateur dans l'expression de cette quantité.

NOTE II.

Tableau de formules de transformation et de réduction de calculs relatifs à la théorie des courbes non planes (*).

Soient posés, conformément à ce qui a été établi à la première partie,

$$(a) \qquad \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = ds \text{ (radical positif)},$$

$$(b) \qquad dyd^2z - dzd^2y = X, \quad dzd^2x - dxd^2z = Y, \quad dxd^2y - dyd^2x = Z,$$

$$(c) \qquad \frac{1}{ds^3}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \frac{1}{\rho},$$

$$(d) \qquad \frac{Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z}{X^2+Y^2+Z^2} = \frac{1}{\nu}.$$

Soient faits encore

$$(e) \qquad d^2yd^3z - d^2zd^3y = X', \quad d^2zd^3x - d^2xd^3z = Y', \quad d^2xd^3y - d^2yd^3x = Z',$$

$$(f) \qquad \begin{cases} d\dfrac{dy}{ds}d^2\dfrac{dz}{ds} - d\dfrac{dz}{ds}d^2\dfrac{dy}{ds} = X'_1, \quad d\dfrac{dz}{ds}d^2\dfrac{dx}{ds} - d\dfrac{dx}{ds}d^2\dfrac{dz}{ds} = Y'_1, \\ d\dfrac{dx}{ds}d^2\dfrac{dy}{ds} - d\dfrac{dy}{ds}d^2\dfrac{dz}{ds} = Z'_1. \end{cases}$$

On en tire les formules de transformation et de réduction suivantes, qu'il est bon d'avoir sous les yeux lorsqu'on se livre à des recherches analytiques sur les courbes non planes (les preuves de chaque formule, non indiquées dans le tableau même, sont renvoyées au

---

(*) *Voyez* n° 13 du texte.

bas des pages):

$$(g)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

$$(h)\qquad \frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}=0, \qquad \text{(résulte de la différentiation de } g),$$

$$(i)\qquad dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z=dsd^2s, \qquad \text{(résulte de la différentiation de } a),$$

$$(j)\qquad d\frac{dx}{ds}=\frac{dsd^2x-dxd^2s}{ds^2},\quad d\frac{dy}{ds}=\frac{ds\,d^2y-dy\,d^2s}{ds^2},\quad d\frac{dz}{ds}=\frac{dsd^2z-dzd^2s}{ds^2},$$

$$(k)\qquad \frac{dy}{ds}d\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}d\frac{dy}{ds}=\frac{X}{ds^2},\quad \frac{dz}{ds}d\frac{dx}{ds}-\frac{dx}{ds}d\frac{dz}{ds}=\frac{Y}{ds^2},\quad \frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}=\frac{Z}{ds^2},$$

$$(k\ bis)\qquad \begin{cases}\dfrac{dy}{ds}d^2\dfrac{dz}{ds}-\dfrac{dz}{ds}d^2\dfrac{dy}{ds}=d\cdot\dfrac{X}{ds^2}, & \dfrac{dz}{ds}d^2\dfrac{dx}{ds}-\dfrac{dx}{ds}d^2\dfrac{dz}{ds}=d\cdot\dfrac{Y}{ds^2},\\ \dfrac{dx}{ds}d^2\dfrac{dy}{ds}-\dfrac{dy}{ds}d^2\dfrac{dx}{ds}=d\cdot\dfrac{Z}{ds^2}.\end{cases}$$

(Les formules (o'') ci-après en donnent d'autres expressions):

$$(l)\qquad d^2\frac{dx}{ds}=\frac{dsd^3x-dxd^3s}{ds^2}-\frac{2d^2s}{ds}d\frac{dx}{ds},\quad d^2\frac{dy}{ds}=\ldots,\quad d^2\frac{dz}{ds}=\ldots, \qquad (\textit{voyez } u'' \text{ ci-après.})$$

$$(m)\qquad X^2+Y^2+Z^2=\frac{ds^6}{\rho^2},$$

$$(n)\qquad d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2=\frac{ds^4}{\rho^2}, \qquad (n^*),$$

$$(o)\qquad \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{ds^2}{\rho^2}, \qquad (o^*),$$

$$(p)\qquad dX=dyd^2z-dzd^2y,\quad dY=dzd^2x-dxd^2z,\quad dZ=dxd^2y-dyd^2x,$$

$$(q)\qquad Xdx+Ydy+Zdz=0,\quad Xd^2x+Yd^2y+Zd^2z=0,\quad Xd\frac{dx}{ds}+Yd\frac{dy}{ds}+Zd\frac{dz}{ds}=0,$$

$$(r)\qquad \begin{cases}X'd^2x+Y'd^2y+Z'd^2z=0, & X'd^2x+Y'd^2y+Z'd^2z=0,\\ dX\,dx+dY\,dy+dZ\,dz=0, & dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z=0,\end{cases}$$

$$(s)\qquad X'_1d\frac{dx}{ds}+Y'_1d\frac{dy}{ds}+Z'_1d\frac{dz}{ds}=0,\quad X'_1d^2\frac{dx}{ds}+Y'_1d^2\frac{dy}{ds}+Z'_1d^2\frac{dz}{ds}=0,$$

(n^*) L'équation (n) résulte du développement de (m). En effet,

$$X^2+Y^2+Z^2=(dy^2+dz^2)d^2x^2+(dz^2+dx^2)d^2y^2+(dx^2+dy^2)d^2z^2-2dydzd^2yd^2z-2dzdxd^2zd^2x-2dxdyd^2xd^2y$$
$$=(dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2,$$

ce qui, au moyen de (a) et de (i), devient $ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)$.

(o^*) En effet, au moyen de (j), on a

$$\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+d\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{1}{ds^4}[(dsd^2x-dxd^2s)^2+(dsd^2y-dyd^2s)^2+(dsd^2z-dzd^2s)^2]$$
$$=\frac{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}{ds^2}+\frac{d^2s^2}{ds^2}-2\frac{dsd^2s\,(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)}{ds^4}=\frac{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}{ds^2},$$

ce qui, au moyen de (n), se réduit à $\frac{ds^2}{\rho^2}$.

$$(t)\qquad dxd^3x + dyd^3y + dzd^3z = dsd^3s - \frac{ds^4}{\rho^2}, \qquad (t^*),$$

$$(u)\qquad d^2xd^3x + d^2yd^3y + d^2zd^3z = d^2sd^3s + \frac{ds^2}{\rho}d\frac{ds^2}{\rho}, \qquad \text{(résulte de la différentiation de } n),$$

$$(v)\qquad \frac{dx}{ds}d^2\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d^2\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d^2\frac{dz}{ds} = -\frac{ds^2}{\rho^2}, \qquad \text{(résulte de } h \text{ et } o),$$

$$(x)\qquad d^2xd\frac{dx}{dz} + d^2yd\frac{dy}{ds} + d^2zd\frac{dz}{ds} = \frac{ds^2}{\rho^2}, \qquad \text{(résulte de } j,\ i,\ n),$$

$$(y)\qquad d^2xd^2\frac{dx}{ds} + d^2yd^2\frac{dy}{ds} + d^2zd^2\frac{dz}{ds} = \frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho}, \qquad (y^*),$$

$$(z)\qquad d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dx}{ds} + d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dy}{dz} + d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dz}{ds} = \frac{ds}{\rho}d\frac{ds}{\rho}, \qquad \text{(résulte de la différentiation de } o),$$

$$(a')\qquad \mathrm{Y}dz - \mathrm{Z}dy = ds^2d\frac{dx}{ds}, \quad \mathrm{Z}dx - \mathrm{X}dz = ds^2d\frac{dy}{dz}, \quad \mathrm{X}dy - \mathrm{Y}dx = ds^2d\frac{dz}{ds}, \qquad (a'^*),$$

$$(b')\qquad \mathrm{Y}d^2z - \mathrm{Z}d^2y = ds^2d^2sd\frac{dx}{ds} - \frac{ds^4}{\rho^2}dx \text{ (et deux autres équations semblables)} \qquad (b'^*),$$

$$(c')\ \mathrm{Y}d\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}d\frac{dy}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dx, \quad \mathrm{Z}d\frac{dx}{ds} - \mathrm{X}d\frac{dz}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dy, \quad \mathrm{X}d\frac{dy}{ds} - \mathrm{Y}d\frac{dx}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dz \quad (c'^*),$$

$$(d')\qquad \mathrm{Y}d^2\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}d^2\frac{dy}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho}d\frac{dx}{\rho} \text{ (et deux autres semblables)}, \qquad (d'^*),$$

$$(e')\qquad d\mathrm{Y}dz - d\mathrm{Z}dy = ds(dsd^2x - dxd^2s) + \frac{dxds^4}{\rho^2} = dsd\left(ds^2d\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dxds^4}{\rho^2} \text{ (et deux autres semblables)} \quad (e'^*),$$

$$(e'\ bis)\qquad d\mathrm{Y}dz - d\mathrm{Z}dy = \rho\cdot d\frac{ds^3}{\rho}\cdot d\frac{dx}{ds} + \frac{\mathrm{X}ds^2}{\upsilon} \qquad \text{(et deux autres semblables, tirées de } e'' \text{ ci-après et de } a',\ k)$$

(t^*) Résulte de la différentiation de (i), en ayant égard à (n).

(y^*) Résulte de (l), (i), (t), (x), et de ce que $\frac{ds}{\rho}\left(d\frac{ds^2}{\rho} - \frac{2dsd^2s}{\rho}\right) = \frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho}$.

(a'^*) Car $\mathrm{Y}ds - \mathrm{Z}dy = (dsd^2x - dxd^2s)\,ds - (dxd^2y - dyd^2x)\,dy = d^2x\,(dy^2 + ds^2) - dx\,(dyd^2y + dsd^2z)$
$= d^2x\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dx\,(dxd^2x + dyd^2y + dsd^2z) = ds^2d^2x - dxdsd^2s.$

(b'^*) Car $\mathrm{Y}d^2z - \mathrm{Z}d^2y = d^2x\,(dxd^2x + dyd^2y + dsd^2z) - dx\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) = dsd^2sd^2x - dx\left(\frac{ds^4}{\rho^2} + d^2s^2\right)$.

(c'^*) Car $\mathrm{Y}d\frac{ds}{ds} - \mathrm{Z}d\frac{dy}{ds} = d^2x\left(dxd\frac{dx}{dy} + dyd\frac{dy}{ds} + dsd\frac{ds}{ds}\right) - dx\left(d^2xd\frac{dx}{ds} + d^2yd\frac{dy}{ds} + d^2sd\frac{ds}{ds}\right)$.

La première partie s'anéantit au moyen de (h), et la seconde, au moyen de (x), se réduit à $-\frac{ds^3}{\rho^2}dx$.

(d'^*) Car $\mathrm{Y}d^2\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}d^2\frac{dy}{ds} = d^2x\left(dxd^2\frac{dx}{ds} + dyd^2\frac{dy}{ds} + dsd^2\frac{dz}{ds}\right) - dx\left(d^2xd^2\frac{dx}{ds} + d^2yd^2\frac{dy}{ds} + d^2sd^2\frac{ds}{ds}\right)$,

qui, moyennant (v) et (y), se réduit à $-d^2x\frac{ds^6}{\rho^3} - dx\frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho} = -\frac{ds^3}{\rho}d\frac{dx}{\rho}$.

(e'^*) Car $d\mathrm{Y}ds - d\mathrm{Z}dy = d^2x\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dx\,(dxd^2x + dyd^2y + dsd^2z) = d^2xds^2 - dx\left(dsd^2s - \frac{ds^4}{\rho^2}\right)$.

$(e'\ ter)$ $$d\frac{\mathrm{Y}}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}-d\frac{\mathrm{Z}}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}=d^2\frac{dx}{ds}+\frac{dx}{ds}\frac{ds^2}{\rho^2}$$ (et deux autres semblables), $(e'\ ter^*)$,

(f') $$\mathrm{X}d^2x+\mathrm{Y}d^2y+\mathrm{Z}d^2z=\frac{ds^6}{\rho^2\tau},$$ (résulte de c, d),

(g') $$\mathrm{Y}d\mathrm{Z}-\mathrm{Z}d\mathrm{Y}=dx\frac{ds^6}{\rho^2\tau},\quad \mathrm{Z}d\mathrm{X}-\mathrm{X}d\mathrm{Z}=dy\frac{ds^6}{\rho^2\tau},\quad \mathrm{X}d\mathrm{Y}-\mathrm{Y}d\mathrm{X}=dz\frac{ds^6}{\rho^2\tau},$$ (g'^*),

(h') $$\mathrm{Y}\mathrm{Z}'-\mathrm{Z}\mathrm{Y}'=d^2x\frac{ds^6}{\rho^2\tau}$$ (et deux autres semblables), (h'^*),

(i') $$\begin{cases} dxd^2yd^2z-dxd^2zd^2y+dyd^2zd^2x-dyd^2xd^2z+dzd^2xd^2y-dzd^2yd^2x \\ =\mathrm{X}d^3x-d\mathrm{X}d^2x+\mathrm{X}'dx=\mathrm{Y}d^3y-d\mathrm{Y}d^2y+\mathrm{Y}'dy=\mathrm{Z}d^3z-d\mathrm{Z}d^2z+\mathrm{Z}'dz \\ =\mathrm{X}'dx+\mathrm{Y}'dy+\mathrm{Z}'dz=-(d\mathrm{X}d^2x+d\mathrm{Y}d^2y+d\mathrm{Z}d^2z)=d^2\mathrm{X}dx+d^2\mathrm{Y}dy+d^2\mathrm{Z}dz \\ =\mathrm{X}d^3x+\mathrm{Y}d^3y+\mathrm{Z}d^3z=\frac{ds^6}{\rho^2\tau}, \end{cases}$$ (résulte de b, e, p),

(j') $\mathrm{X}d^2y-d\mathrm{X}d^2y+\mathrm{X}'dy=0$, $\mathrm{X}d^2z-d\mathrm{X}d^2z+\mathrm{X}'dz=0$ (et de même pour les quatre autres trinômes semblables) (de *id.*),

(k') $$\begin{cases} dsd^2yd^2z-dsd^2zd^2y+dyd^2zd^2s-dyd^2sd^2z+dzd^2sd^2y-dzd^2yd^2s \\ =\mathrm{X}d^3s-d\mathrm{X}d^2s+\mathrm{X}'ds=\frac{ds^3}{\rho^2}\left(\mathrm{X}+\frac{dx\,ds^2}{\tau}\right) \end{cases}$$ (et deux équations semblables en Y et Z), (k'^*),

(l') $$\mathrm{X}'_s=\frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{X}+\frac{dxds^2}{\tau}\right),\quad \mathrm{Y}'_s=\frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{Y}+\frac{dyds^2}{\tau}\right),\quad \mathrm{Z}'_s=\frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{Z}+\frac{dzds^2}{\tau}\right),$$ (l'^*),

---

$(e'\ ter^*)$ Car, en développant le premier membre au moyen de $(k\ bis)$, on trouve

$$d^2\frac{dx.dx^2+dy^2+ds^2}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\left(\frac{dx}{ds}d^2\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d^2\frac{dy}{ds}+\frac{ds}{ds}d^2\frac{ds}{ds}\right),$$

expression qui se réduit, au moyen de (ν), à celle qu'on a donnée.

(g'^*) Car $\mathrm{Y}d\mathrm{Z}-\mathrm{Z}d\mathrm{Y}=\mathrm{Y}(dxd^2y-dyd^2x)-\mathrm{Z}(dsd^2x-dxd^2s)=dx(\mathrm{X}d^2x+\mathrm{Y}d^2y+\mathrm{Z}d^2s)-d^2x(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}ds)$, qui se réduit à $dx\frac{ds^6}{\rho^2\tau}$ au moyen de (f'), (q).

(h'^*) Car $$\mathrm{Y}\mathrm{Z}'-\mathrm{Z}\mathrm{Y}'=d^2x(\mathrm{X}d^2x+\mathrm{Y}d^2y+\mathrm{Z}d^2s)-d^2x(\mathrm{X}d^2x+\mathrm{Y}d^2y+\mathrm{Z}d^2s),$$ qui se réduit à $d^2x\frac{ds^6}{\rho^2\tau}$ au moyen de (f'), (q).

(k'^*) Car, d'après (a), (t), (i), on a

$$\mathrm{X}dsd^2s-d\mathrm{X}dsd^2s+\mathrm{X}'ds^3=\mathrm{X}\left(\frac{ds^4}{\rho^2}+dxd^2x+dyd^2y+dsd^2s\right)-d\mathrm{X}(dxd^2x+dyd^2y+dsd^2s)+\mathrm{X}'(dx^2+dy^2+ds^2),$$

expression qui se réduit à $\frac{\mathrm{X}ds^4}{\rho^2}+dx\frac{ds^6}{\rho^2\tau}$, d'après (l'), (j').

(l') Ces formules importantes se démontrent en remarquant que, d'après (f), (j), (l), (e), on a

$$\mathrm{X}'_s=d\frac{dy}{ds}d^2\frac{ds}{ds}-\frac{ds}{ds}d^2\frac{dy}{ds}=\frac{1}{ds}\left(d^2s\frac{dy}{ds}-d^2yd\frac{ds}{ds}\right)+\frac{d^2s}{ds^2}\frac{\mathrm{X}}{ds}=\frac{1}{ds^2}(\mathrm{X}d^2s-d\mathrm{X}d^2s+\mathrm{X}'ds),$$

ou bien encore que $$\mathrm{X}'_s\,ds^2=ds^2\left(d\frac{dy}{ds}d^2\frac{ds}{ds}-\frac{ds}{ds}d^2\frac{dy}{ds}\right)=ds^2\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2d\,\frac{d\frac{ds}{ds}}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{1}{ds}(dsd^2y-dyd^2s)^2d.\frac{dsd^2s-dsd^2s}{dsd^2y-dyd^2s}$$

$$=\frac{1}{ds}[(dsd^2y-dyd^2s)(dsd^2s-dsd^2s)-(dsd^2s-dsd^2s)(dsd^2y-dyd^2s$$

$$=dsd^2yd^2z-dsd^2zd^2y+dyd^2zd^2s-dyd^2sd^2z+dzd^2sd^2y-dzd^2yd^2s,$$

en sorte que, d'après (k'), on a $\mathrm{X}'_s=\frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{X}+\frac{dx\,ds^2}{\tau}\right)$.

$$(m')\qquad X_s'^2+Y_s'^2+Z_s'^2=\frac{ds^6}{\rho^4}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\upsilon^2}\right)=\frac{ds^6}{\rho^6\upsilon^2}(\rho^2+\upsilon^2),$$

$$(n')\qquad X_s'\frac{dx}{ds}+Y_s'\frac{dy}{ds}+Z_s'\frac{dz}{ds}=\frac{ds^3}{\rho^2\upsilon},$$

$$(o')\qquad XX_s'+YY_s'+ZZ_s'=\frac{ds^6}{\rho^4},$$

(résultent de l', m, q),

$$(p')\quad Y_s'\frac{dz}{ds}-Z_s'\frac{dy}{ds}=\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{dx}{ds},\quad Z_s'\frac{dx}{ds}-X_s'\frac{dz}{ds}=\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{dy}{ds},\quad X_s'\frac{dy}{ds}-Y_s'\frac{dx}{ds}=\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{dz}{ds},$$

$$(q')\quad YZ_s'-ZY_s'=\frac{ds^3}{\rho^2\upsilon}d\frac{dx}{ds}\ \text{(et deux autres semblables)},$$

(résultent de l', a'),

$$(r')\qquad Y_s'd\frac{dz}{ds}-Z_s'd\frac{dy}{ds}=\frac{ds^3}{\rho^3}d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}\ \text{(et deux autres semblables)},\qquad (r'^*),$$

$$(s')\quad d\cdot\frac{\rho X}{ds^3}=d\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=-\frac{\rho}{\upsilon}d\frac{dx}{ds},\quad d\frac{\rho Y}{ds^3}=-\frac{\rho}{\upsilon}d\frac{dy}{ds},\quad d\frac{\rho Z}{ds^3}=-\frac{\rho}{\upsilon}d\frac{dz}{ds},\qquad (s'^*),$$

$$(t')\quad \frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}d\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}-\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}d\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}=\frac{\rho^2}{ds^2}X_s'\ \text{(et deux autres analogues s'obtiennent en développant)},$$

$$(u')\qquad d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}=\frac{\rho X}{\upsilon ds^2}-\frac{dx}{\rho},\quad d\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}=\frac{\rho Y}{\upsilon ds^2}-\frac{dy}{\rho},\quad d\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}=\frac{\rho Z}{\upsilon ds^2}-\frac{dz}{\rho},\qquad (u'^*),$$

$$(u'\ bis)\quad d^2\frac{dx}{ds}=\frac{ds}{\rho}\left(\frac{\rho X}{\upsilon ds^2}-\frac{dx}{\rho}\right)+\frac{\rho}{ds}d\frac{ds}{\rho}\cdot d\frac{dx}{ds}\ \text{(et deux autres semblables, résultent de } u'),$$

$$(v')\qquad \left(d^2\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dz}{ds}\right)^2-\left(d\frac{ds}{\rho}\right)^2=\frac{ds^4}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\upsilon^2}\right),\qquad (v'^*),$$

(r'^*) Car $$Y_s'd\frac{dz}{ds}-Z_s'd\frac{dy}{ds}=d^2\frac{dx}{ds}\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right]-d\frac{dx}{ds}\left(d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dx}{ds}+d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dy}{ds}+d\frac{ds}{ds}d^2\frac{dz}{ds}\right)$$
$$=d^2\frac{dx}{ds}\frac{ds^2}{\rho^2}-d\frac{dx}{ds}\frac{ds}{\rho}d\frac{ds}{\rho}=\frac{ds}{\rho}\frac{ds^2}{\rho^2}d\left(\frac{\rho}{ds}d\frac{dx}{ds}\right).$$

(s'^*) Car $$d\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{(X^2+Y^2+Z^2)\,dX-X(XdX+YdY+ZdZ)}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}=-[Y(XdY-YdX)-Z(ZdX-XdZ)]\frac{\rho^3}{ds^3},$$

expression qui se réduit, au moyen de (g'), à $-\frac{\rho}{\upsilon ds^3}(Ydz-Zdy)$, et, au moyen de (a'), à $-\frac{\rho}{\upsilon}d\frac{dx}{ds}$.

(u'^*) Car, d'après (r'), (l'), (c') et (k),

$$d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}=\frac{\rho^3}{ds^3}\left(Y_s'd\frac{dz}{ds}-Z_s'd\frac{dy}{ds}\right)=\frac{\rho}{ds^3}(Yd\frac{dz}{ds}-Zd\frac{dy}{ds})+\frac{\rho}{\upsilon ds}\left(dyd\frac{dz}{ds}-dsd\frac{dy}{ds}\right)=-\frac{\rho}{ds^2}\cdot\frac{ds^2}{\rho^2}dx+\frac{\rho}{\upsilon ds}\frac{X}{ds}.$$

(v'^*) On obtient cette équation en développant le premier membre $X_s'^2+Y_s'^2+Z_s'^2$ de (m'), comme nous avons développé $X^2+Y^2+Z^2$ pour obtenir la formule (n) à laquelle (v') est analogue. On l'obtient encore en ajoutant les carrés des trois expressions $(u'\ bis)$.

$$(x') \qquad \left(\rho d\frac{\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\rho d\frac{\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\rho d\frac{\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2=ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right), \qquad (x'^*),$$

$$(y') \qquad dX\,d\frac{dx}{ds}+dY\,d\frac{dy}{ds}+dZ\,d\frac{dz}{ds}=-\frac{ds^3}{\rho^2\tau}; \qquad \text{(résulte de } j,\ i'),$$

$$(z') \qquad \frac{dx}{ds}d^3\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d^3\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d^3\frac{dz}{ds}=-3\frac{ds}{\rho}d\frac{ds}{\rho}=-\frac{\rho}{ds}d\frac{ds^3}{\rho^3}, \qquad \text{(de } \nu \text{ différentié et de } z),$$

$$(a'') \qquad \frac{X}{ds^2}d^2\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{ds^2}d^2\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{ds^2}d^2\frac{dz}{ds}=\frac{ds^3}{\rho^2\tau}, \qquad \text{(de } l,\ q,\ f'),$$

$$(b'') \qquad dX\,d^2\frac{dx}{ds}+dY\,d^2\frac{dy}{ds}+dZ\,d^2\frac{dz}{ds}=2d^2s\,\frac{ds^4}{\rho^2\tau}, \qquad \text{(de } l,\ r,\ y'),$$

$$(b''\ bis) \qquad d\frac{X}{ds^2}d^2\frac{dx}{ds}+d\frac{Y}{ds^2}\cdot d^2\frac{dy}{ds}+d\frac{Z}{ds^2}\cdot d^2\frac{dz}{ds}=0, \qquad \text{(se déduit de } k\ bis),$$

$$(c'') \qquad X\,d^3\frac{dx}{dy}+Y\,d^3\frac{dy}{ds}+Z\,d^3\frac{dz}{ds}=ds^3d\frac{ds^3}{\rho^2\tau}, \qquad \text{(de } a'' \text{ différentié et de } b''\ bis),$$

$$(d'') \qquad \begin{cases} d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dy}{ds}d^3\frac{dz}{ds}-d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dz}{ds}d^3\frac{dy}{ds}+d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dz}{ds}d^3\frac{dx}{ds}-d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dx}{ds}d^3\frac{dz}{ds}+d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dx}{ds}d^3\frac{dy}{ds}-d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dy}{ds}d^3\frac{dx}{ds} \\ \qquad =X'_s\,d^3\frac{dx}{ds}+Y'_s\,d^3\frac{dy}{ds}+Z'_s\,d^3\frac{dz}{ds}=\frac{ds^5}{\rho^5}d\frac{\rho}{\nu}=-\frac{ds^5}{\rho^3\nu^2}d\frac{\nu}{\rho}, \qquad (d''^*), \end{cases}$$

$$(e'') \qquad dX=\frac{\rho X}{ds^3}d\frac{ds^3}{\rho}-\frac{ds^3}{\tau}d\frac{dx}{ds}, \quad dY=\ldots, \quad dZ=\ldots, \qquad (e''^*),$$

(x'^*) Cette formule, analogue à (o), se déduit de (u') et peut encore s'obtenir en remarquant que

$$d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}=d\frac{\rho}{ds}\,d\frac{dx}{ds}+\frac{\rho}{ds}d^2\frac{dx}{ds};$$

d'où il suit que le premier membre de (x') développé revient à

$$\left(\frac{ds}{\rho}\,d\frac{\rho}{ds}+\frac{\rho}{ds}\,d\frac{ds}{\rho}\right)^2+\frac{\rho^2}{ds^2}\left[\left(d^2\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{ds}{ds}\right)^2-\left(d\frac{ds}{\rho}\right)^2\right],$$

expression qui se réduit à $ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\nu^2}\right)$ au moyen de (ν'), si l'on fait attention que le premier terme est nul.

(d''^*) Car, en mettant pour X'_s, Y'_s, Z'_s leurs valeurs (l^4), on a

$$X'_s\,d^3\frac{dx}{ds}+Y'_s\,d^3\frac{dy}{ds}+Z'_s\,d^3\frac{ds}{ds}=\frac{1}{\rho^2}\left(X\,d^3\frac{dx}{ds}+Y\,d^3\frac{dy}{ds}+Z\,d^3\frac{ds}{ds}\right)+\frac{ds^2}{\rho^2\tau}\left(\frac{dx}{ds}d^3\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d^3\frac{dy}{ds}+\frac{ds}{ds}d^3\frac{ds}{ds}\right),$$

ou, d'après (c''), (z'),

$$=\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{\rho ds^2}{\tau\rho^2}-\frac{ds^2}{\rho^2}\frac{\rho}{ds}d\frac{ds^2}{\rho}=\frac{ds^2}{\rho^2}\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{\rho}{\tau}.$$

(e''^*) Car, d'après (z'), on a $dX\frac{\rho}{ds^2}+Xd\frac{\rho}{ds^2}=-\frac{\rho}{\tau}d\frac{dz}{ds}$; et l'on a $d\frac{\rho}{ds^2}=-\frac{\rho^2}{ds^3}d\frac{ds^2}{\rho}$.

$$(f'')\qquad \begin{cases} d\mathrm{X}'_s = d\dfrac{dy}{ds}d^2\dfrac{dz}{ds} - d\dfrac{dz}{ds}d^2\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{dx}{ds}d\dfrac{ds^2}{\rho^2\tau} + \dfrac{\rho\mathrm{X}}{ds^2}d\dfrac{ds^2}{\rho^2} = \dfrac{\rho^2\mathrm{X}'_s}{ds^2}d\dfrac{ds^2}{\rho^2} + \dfrac{dx\,ds^2}{\rho^2}d\dfrac{\rho}{\tau}, \\ d\mathrm{Y}'_s = \ldots, \quad d\mathrm{Z}'_s = \ldots, \end{cases} \qquad (f''^*),$$

$$(g'')\qquad \mathrm{Y}'_s\,d\mathrm{Z}'_s - \mathrm{Z}'_s\,d\mathrm{Y}'_s = \frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{\rho}{\tau}\cdot d\frac{dx}{ds} \text{ (et deux autres équations analogues)}, \qquad (g''^*),$$

$$(h'')\quad d\frac{\mathrm{X}'_s}{\sqrt{\mathrm{X}'^2_s+\mathrm{Y}'^2_s+\mathrm{Z}'^2_s}} = d\frac{\rho^2\mathrm{X}'_s}{ds^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}} = -\frac{d\frac{\rho}{\tau}}{\rho^2 ds\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{\frac{3}{2}}}d\frac{\rho\,d\frac{dx}{ds}}{ds} \text{ (et deux autres analogues)}, \qquad (h''^*),$$

$$(i'')\quad \left(d\frac{\mathrm{X}'_s}{\sqrt{\mathrm{X}'^2_s+\mathrm{Y}'^2_s+\mathrm{Z}'^2_s}}\right)^2 + \left(d\frac{\mathrm{Y}'_s}{\sqrt{\quad}}\right)^2 + \left(d\frac{\mathrm{Z}'_s}{\sqrt{\quad}}\right)^2 = \left(\frac{\tau^2 d\frac{\rho}{\tau}}{\rho^2+\tau^2}\right)^2 = \left(\frac{\rho^2 d\frac{\tau}{\rho}}{\rho^2+\tau^2}\right)^2 \text{ (de } h'', x'),$$

$$(j'')\qquad dx - d\frac{\rho^2\mathrm{X}'_s}{ds^2 d\frac{\rho}{\tau}} = -\frac{\rho^2\mathrm{X}'_s}{ds^2}d\frac{ds}{d\frac{\rho}{\tau}} \text{ (et deux autres analogues)}, \qquad (j''^*),$$

$$(k'')\qquad \mathrm{X}d\mathrm{X} + \mathrm{Y}d\mathrm{Y} + \mathrm{Z}d\mathrm{Z} = \frac{ds^2}{\rho}d\frac{ds^2}{\rho}, \qquad \text{(de la différentiation de } m),$$

(f''^*) Car, d'après la valeur (l') de X'_s, on a

$$d\mathrm{X}'_s = \frac{d\mathrm{X}}{\rho^2} + \mathrm{X}d\frac{1}{\rho^2} + \frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{dx}{ds} + \frac{dx}{ds}d\frac{ds^2}{\rho^2\tau};$$

et, d'après la valeur (e'') de $d\mathrm{X}$ que l'on vient d'écrire, les trois premiers termes se changent en

$$\frac{\mathrm{X}}{\rho ds^2}d\frac{ds^2}{\rho} + \mathrm{X}d\frac{1}{\rho^2} = \frac{\rho\mathrm{X}}{ds^2}\left(\frac{1}{\rho^2}d\frac{ds^2}{\rho} + \frac{ds^2}{\rho}d\frac{1}{\rho^2}\right) = \frac{\rho\mathrm{X}}{ds^2}d\frac{ds^2}{\rho^2}.$$

(g''^*) Car
$$\mathrm{Y}'_s\,d\mathrm{Z}'_s - \mathrm{Z}'_s\,d\mathrm{Y}'_s = \mathrm{Y}'_s\left(d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dy}{ds} - d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dx}{ds}\right) - \mathrm{Z}'_s\left(d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dx}{ds} - d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dz}{ds}\right)$$

$$= d\frac{dx}{ds}\left(\mathrm{X}'_s d^2\frac{dx}{ds} + \mathrm{Y}'_s d^2\frac{dy}{ds} + \mathrm{Z}'_s d^2\frac{dz}{ds}\right) - d^2\frac{dx}{ds}\left(\mathrm{X}'_s d\frac{dx}{ds} + \mathrm{Y}'_s d\frac{dy}{ds} + \mathrm{Z}'_s d\frac{dz}{ds}\right),$$

expression dont la seconde partie est nulle et dont la première est égale à $\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{\rho}{\tau}\cdot d\frac{dx}{ds}$, d'après ($d''$).

(h''^*) Cette formule s'obtient, comme on a obtenu (s'), en ayant égard à (m'), (g'') et (r').

(j''^*) Car, d'après (f''), on a

$$dx - d\frac{\mathrm{X}'_s}{\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{\rho}{\tau}} = \frac{\rho^6}{ds^4\left(d\frac{\rho}{\tau}\right)^3}\left\{\frac{ds^4\,dx}{\rho^6}\left(d\frac{\rho}{\tau}\right)^2 - \frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{\rho^2\mathrm{X}'_s}{ds^2}d\frac{ds^2}{\rho^2} + \frac{dx\,ds^2}{\rho^2}d\frac{\rho}{\tau}\right) + \mathrm{X}'_s\left(d\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{\rho}{\tau} + \frac{ds^2}{\rho^2}d^2\frac{\rho}{\tau}\right)\right\}$$

$$= \frac{\rho^6\mathrm{X}'_s}{ds^4\left(d\frac{\rho}{\tau}\right)^3}\left[\left(-\frac{1}{ds}d\frac{ds^2}{\rho^2} + d\frac{ds^2}{\rho^2}\right)d\frac{\rho}{\tau} + \frac{ds^2}{\rho^2}d^2\frac{\rho}{\tau}\right] = \frac{\rho^6\mathrm{X}'_s}{ds^4\left(d\frac{\rho}{\tau}\right)^3}\frac{ds}{\rho^2}\left(-d^2s\,d\frac{\rho}{\tau} + ds\,d^2\frac{\rho}{\tau}\right) = -\frac{\rho^2\mathrm{X}'_s}{ds^2}d\frac{ds}{d\frac{\rho}{\tau}}.$$

(l'') $$\frac{ds^2}{v^2}=\frac{\rho^2}{ds^6}(dX^2+dY^2+dZ^2)-\frac{\rho^4}{ds^{12}}(X\,dX+Y\,dY+Z\,dZ)^2,$$ (l''^*),

(m'') $$dX^2+dY^2+dZ^2=\frac{ds^6}{\rho^2 v^2}+\left(d\frac{ds^2}{\rho}\right)^2,$$ (de l'' et k''),

(n'') $$dX_s'^2+dY_s'^2+dZ_s'^2=\left(d\frac{ds^3}{\rho^2 v}\right)^2+\left(d\frac{ds^3}{\rho^3}\right)^2,$$ (résulte de f'''),

(o'') $$d\frac{X}{ds^3}\text{ ou }\frac{\rho X}{ds^3}d\frac{ds}{\rho}-\frac{ds}{v}d\frac{dx}{ds},\quad d\frac{Y}{ds^3}=\ldots,\quad d\frac{Z}{ds^3}=\ldots$$

(p'') $$d\frac{X}{ds^3}=-\frac{X}{ds^3}\frac{d\rho}{\rho}-\frac{1}{v}d\frac{dx}{ds},\quad d\frac{Y}{ds^3}=\ldots,\quad d\frac{Z}{ds^3}=\ldots$$

(se tirent de s' comme on en a tiré e''),

(q'') $$\left(d\frac{X}{ds^3}\right)^2+\left(d\frac{Y}{ds^3}\right)^2+\left(d\frac{Z}{ds^3}\right)^2=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{ds^2}{v^2}+\frac{d\rho^2}{\rho^2}\right)$$ (résulte de p'', m, o, q),

(r'') $$\frac{Y}{ds^3}d\frac{Z}{ds^3}-\frac{Z}{ds^3}d\frac{Y}{ds^3}=\frac{dx}{\rho^2 v}$$ et deux autres analogues, (de p'', c'),

(s'') $$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\left(\frac{X}{ds^2}\right)^2+\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2}{ds^2-dx^2}=\frac{\left(\frac{Y}{ds^2}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2}{ds^2-dy^2}=\frac{\left(\frac{Z}{ds^2}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}{ds^2-dz^2},$$ (s''^*),

(t'') $$-\frac{1}{\rho^2}=\frac{\frac{Y}{ds^2}\frac{Z}{ds^2}+d\frac{dy}{ds}d\frac{dz}{ds}}{dy\,dz}=\frac{\frac{Z}{ds^2}\frac{X}{ds^2}+d\frac{dz}{ds}d\frac{dx}{ds}}{dz\,dx}=\frac{\frac{X}{ds^2}\frac{Y}{ds^2}+d\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}}{dx\,dy},$$ (t''^*).

Je joins à ce tableau celui des valeurs analytiques des quantités $\mathfrak{R}$, H, L, R dont on a donné les significations géométriques au n° 12, et qui figurent dans les formules des

---

(l''^*) Car, d'après (s'), on a

$$-\frac{\rho}{v}d\frac{dx}{ds}=\frac{(X^2+Y^2+Z^2)\,dX-X(X\,dX+Y\,dY+Z\,dZ)}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ajoutant les trois équations semblables après les avoir élevées au carré, on obtient, eu égard à (m), (o), l'équation (l'').

(s''^*) En effet, d'après (k), on a

$$\left(\frac{X}{ds^2}\right)^2+\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2=\left(\frac{dy}{ds}d\frac{ds}{ds}-\frac{ds}{ds}d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2$$
$$=\frac{ds^2-dx^2-dz^2}{ds^2}\left(d\frac{ds}{ds}\right)^2+\frac{dz^2-dx^2-dy^2}{ds^2}\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{ds^2}{ds^2}\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2-2\frac{dy}{ds}\frac{ds}{ds}d\frac{dy}{ds}d\frac{ds}{ds}$$
$$=\frac{ds^4}{\rho^2}-\frac{dx^2}{ds^2}\left[\left(d\frac{ds}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2\right]-\left(\frac{dz}{ds}d\frac{ds}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

expression qui, d'après (h), (o), se réduit à $\frac{ds^4}{\rho^2}-\frac{dx^2}{ds^2}\frac{ds^4}{\rho^2}$.

(t''^*) En effet, en développant $YZ+(ds\,d^2y-dy\,d^2s)(ds\,d^2z-dz\,d^2s)$, et remplaçant $ds\,d^2s$ par $dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z$, et ds^2 par $dx^2+dy^2+dz^2$, on obtient, en réduisant,

$$-dy\,dz\,(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)=-dy\,dz\frac{ds^2}{\rho^2}.$$

deuxième et troisième parties :

$$(u'') \qquad \mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}} \text{ (radical positif)}, \quad \frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2},$$

$$(v'') \qquad \operatorname{tang} H = \frac{\tau}{\rho}, \quad \sin H = \frac{1}{\rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}} = \frac{\mathcal{R}}{\rho}, \quad \cos H = \frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}} = \frac{\mathcal{R}}{\tau},$$

$$(x'') \qquad L = \frac{ds \sin H}{dH} = -\frac{\rho ds}{\mathcal{R} d\frac{\rho}{\tau}},$$

$$(y'') \qquad \mathcal{R} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\tau d\rho}{ds}\right)^2} \text{ (radical positif)}.$$

Toutes les formules du tableau sont susceptibles d'être interprétées et démontrées géométriquement. On en a vu des exemples au n° 13, où des considérations géométriques ont conduit à trois expressions différentes du petit angle appelé $\frac{ds}{\mathcal{R}}$, ce qui, en y ajoutant le raisonnement du n° 23, donnant directement la valeur de $\frac{ds}{\mathcal{R}}$, fournit des démonstrations et interprétations géométriques des formules (x'), (m'), (ν') du tableau. En voici d'autres exemples :

1°. Si, sur les côtés M'C, M'C' (*fig.* 4) de la pyramide triangulaire considérée au n° 23, on porte des longueurs $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{\rho}+d\frac{ds}{\rho}$, l'aire du triangle construit sur ces deux petites lignes aura pour projections sur les trois plans coordonnés, d'après ce qu'on a vu n° 13,

$$\frac{1}{2}X'_s, \quad \frac{1}{2}Y'_s, \quad \frac{1}{2}Z'_s.$$

L'aire du triangle CM'C', ayant des côtés égaux à l'unité, sera à l'aire du précédent comme 1 est à $\frac{ds^2}{\rho^2}$; donc les projections de l'aire CM'C' sont

$$\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{ds^2}X'_s, \quad \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{ds^2}Y'_s, \quad \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{ds^2}Z'_s.$$

La face BM'C de la même pyramide a pour aire $\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho}$, et fait, avec les plans coordonnés, des angles dont les cosinus sont

$$\frac{\rho X}{ds^3}, \quad \frac{\rho Y}{ds^3}, \quad \frac{\rho Z}{ds^3}.$$

La face BM'C' a pour aire $\frac{1}{2}\frac{ds}{\tau}$, et fait, avec les plans coordonnés, des angles dont les co-

sinus sont

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

La projection de la grande face CMC′, sur l'un quelconque de ces trois plans, est égale à la somme des projections des deux autres faces, car la petite base de la pyramide est négligeable par rapport aux faces. Donc on a

$$\frac{\rho^2}{ds^2}X'_s = \frac{ds}{\rho}\frac{\rho X}{ds^3} + \frac{ds}{\nu}\frac{dx}{ds}, \quad \frac{\rho^2}{ds^2}Y'_s = \frac{ds}{\rho}\frac{\rho Y}{ds^3} + \frac{ds}{\nu}\frac{dy}{ds}, \quad \frac{\rho^2}{ds^2}Z'_s = \frac{ds}{\rho}\frac{\rho Z}{ds^3} + \frac{ds}{\nu}\frac{dz}{ds},$$

ce qui donne l'interprétation et la démonstration géométrique des formules (l'), les plus importantes peut-être du tableau, et dont l'établissement par l'analyse a été le plus difficile.

2°. Si l'on projette successivement la grande face de la pyramide sur les plans des deux petites faces, on obtient ces faces elles-mêmes. Donc on a

$$\frac{\rho^2}{ds^2}X'_s\frac{\rho X}{ds^3} + \frac{\rho^2}{ds^2}Y'_s\frac{\rho Y}{ds^3} + \frac{\rho^2}{ds^2}Z'_s\frac{\rho Z}{ds^3} = \frac{ds}{\rho},$$

$$\frac{\rho^2}{ds^2}X'_s\frac{dx}{ds} + \frac{\rho^2}{ds^2}Y'_s\frac{dy}{ds} + \frac{\rho^2}{ds^2}Z'_s\frac{dz}{ds} = \frac{ds}{\nu},$$

c'est-à-dire les résultats (o'), (n') du tableau.

3°. L'hypoténuse CC′ (*fig.* 4) de la base de la pyramide a pour projections sur les trois axes, d'après ce qu'on a vu au n° 13,

$$d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad d\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad d\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Le côté CB du même triangle a pour longueur $\frac{ds}{\rho}$, et sa direction est parallèle et opposée à celle de l'élément MM′, en sorte que les cosinus des angles qu'il fait avec les trois axes coordonnés sont

$$-\frac{dx}{ds}, \quad -\frac{dy}{ds}, \quad -\frac{dz}{ds}.$$

Le côté BC′ a pour longueur $\frac{ds}{\nu}$ et est parallèle à la binormale, en sorte qu'il fait, avec les trois axes, les angles dont les cosinus sont

$$\frac{\rho X}{ds^2}, \quad \frac{\rho Y}{ds^2}, \quad \frac{\rho Z}{ds^2}.$$

c'est-à-dire les formules (p'') du tableau. Elles ont de l'intérêt, parce que la petite ligne de jonction dont nous venons de déterminer les projections sur les trois axes coordonnés est parallèle au rayon de la sphère osculatrice. Il est curieux de voir que la direction de ce rayon, en un point quelconque, est donnée par le troisième côté d'un triangle fait sur deux lignes perpendiculaires aux plans osculateurs en ce point et en un autre très-voisin, et proportionnelles aux courbures en ces deux mêmes points. Mais les considérations géométriques du n° 31 font arriver plus facilement à la détermination de la position du centre de cette sphère.